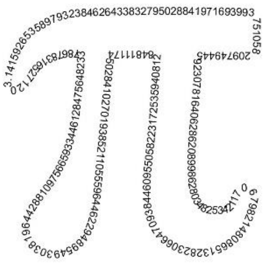
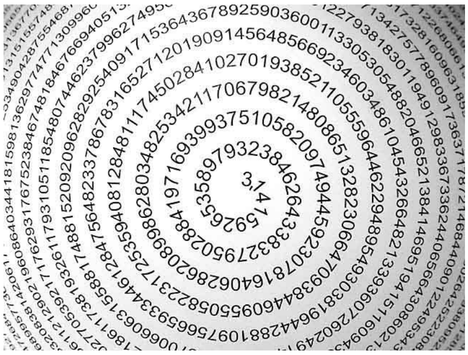
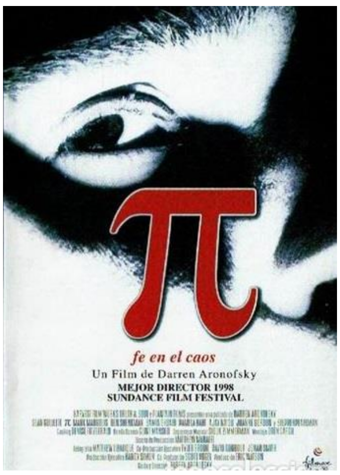


El número π es un número de enorme importancia en Matemáticas y en las ciencias en general. Es conocido desde la antigüedad y es la proporción que hay entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (o el doble de su radio).



Es un número irracional, lo que conlleva que tiene una cantidad de cifras decimales infinita y no periódica, por lo que es imposible escribir completamente su desarrollo decimal. Por eso y dada la importancia de su uso, los griegos decidieron ponerle un nombre y utilizaron la letra π que es la inicial de la palabra perímetro (περιμετρο en griego), en referencia al borde de la circunferencia.

Además de su constante aparición en cuestiones geométricas, aparece también en numerosas ramas de las Matemáticas muy alejadas de la geometría y también en muchas constantes universales de la Física. Todo esto lo ha llevado a aparecer en muchas manifestaciones culturales y populares como la película de Darren Aronofsky o la serie de televisión *Futurama*



El número π es la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. También es la proporción entre el área de un círculo y el cuadrado de su radio, es decir, que el área de un círculo es π por el radio al cuadrado.

Ejercicio 1

En una circunferencia de radio 10 cm se inscribe un triángulo rectángulo. Un cateto del triángulo mide 16 cm.

a) ¿Cuánto mide el otro cateto?

Al ser un triángulo rectángulo, la hipotenusa pasará por el centro de la circunferencia, así que medirá lo mismo que el diámetro, ésto es, 20 cm.

Utilizando el teorema de Pitágoras tendremos que $20^2 = 16^2 + cateto^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 400 = 256 + cateto^2 \Rightarrow 400 - 256 = cateto^2 \Rightarrow 144 = cateto^2 \Rightarrow cateto = 12$ cm

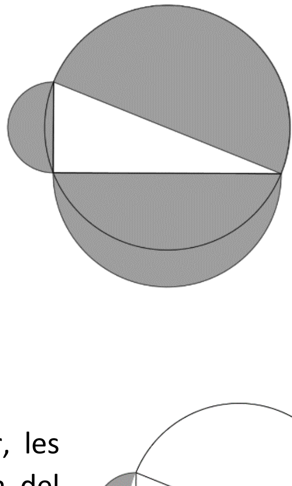
b) Sobre los puntos medios de los lados del triángulo se trazan semicírculos. ¿Cuánto mide el área de cada semicírculo?

El área de cada semicírculo será la mitad de π por el cuadrado de su radio, y cada radio será la mitad del lado del triángulo. Así que las tres áreas son:

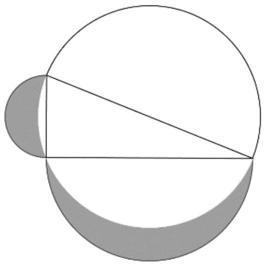
$$\frac{1}{2}\pi 10^2 = 50\pi \simeq 157'08 \text{ cm}^2$$

$$\frac{1}{2}\pi 8^2 = 32\pi \simeq 100'53 \text{ cm}^2$$

$$\frac{1}{2}\pi 6^2 = 18\pi \simeq 56'55 \text{ cm}^2$$



c) ¿Cuánto mide el área sombreada de la segunda figura?



Si a las tres áreas calculadas en el apartado anterior, les añadimos el área del triángulo y le restamos el área del círculo original, obtenemos el área sombreada:

$$50\pi + 32\pi + 18\pi + \frac{16.12}{2} - \pi 10^2 = 100\pi + 96 - 100\pi = 96 \text{ cm}^2.$$

Es decir, que la zona sombreada tiene la misma superficie que el triángulo.

El número π es un número irracional, es decir, que su desarrollo decimal tiene una cantidad ilimitada de cifras no periódicas. A lo largo de la historia, se ha tratado de encontrar cada vez más cifras de π utilizando diversos métodos. Recientemente, la programadora japonesa Emma Haruka Iwao ha encontrado más de 3 billones de dígitos de π. Veamos algunos problemas de dígitos y números

Ejercicio 2

Dígitos y números

a) Hay 24 números de cuatro cifras formados por los dígitos 2, 4, 5 y 7 y sin que se repita ninguno de ellos. De los 24, hay uno que es múltiplo de otro diferente. ¿De qué números se trata?

Solución

De esos 24 números, el menor es 2457 y el mayor 7542 y 2457.4 > 7542, de manera que si hay un número a que es múltiplo de otro b, tiene que ser el doble o el triple.

Supongamos que $a = 3b$. Entonces la cifra de las decenas de millar de b tiene que ser 2. Además, la cifra de las unidades de b tiene que ser 4 ó 5 (ya que si fuera 2 ó 7, el producto por tres terminaría en 6 ó 1 respectivamente). Las únicas posibilidades para b son 2754, 2574, 2745 y 2475. Multiplicamos por 3 y obtenemos respectivamente 8262, 7722, 8235 y 7425

Supongamos que $a = 2b$. Entonces la cifra de las decenas de millar de b tiene que ser 2 ó 3. Además, la cifra de las unidades de b tiene que ser 2 ó 7 (ya que si fuera 4 ó 5, el producto por dos terminaría en 8 ó 0 respectivamente). Si la cifra de las decenas de millar es 2, como no pueden repetirse, las únicas posibilidades son 2457 y 2547, que al multiplicar por 2 resulta 4914 y 5094. Si la cifra de las decenas de millar es 3, la de los millares no puede ser 7 porque al multiplicar por 3, habría dos unidades de llevadas y nos pasaríamos. Así que las únicas posibilidades son 3257, 3527 y 3572, que multiplicadas por 2 resultan 6514, 7054 y 7144

De modo que sólo hay una posibilidad: 7425 = 3 . 2475

b) En una lista de siete números, si tomamos los cuatro primeros resulta que su media es 5 y si tomamos los cuatro últimos su media es 8. Si la media de los siete números es $\frac{46}{7}$, ¿qué número ocupa la posición central?

Solución

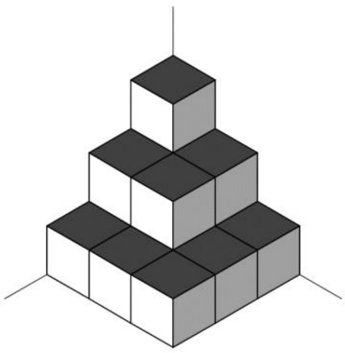
Si la media de los cuatro primeros es 5, es que suman 20. De igual manera, los cuatro últimos suman 32. La suma 20 + 32 resultará la suma de los siete números pero el 4º lo habremos sumado dos veces ya que está tanto entre los cuatro primeros como entre los cuatro últimos. Además, como la media de los siete es $\frac{46}{7}$, tenemos que los siete suman 46. Así el número de la posición central es 20 + 32 – 46 = 6

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{13 + \cfrac{49}{\ddots}}}}}}}}$$

Se han descubierto numerosas formas de calcular el número π: como una suma de infinitos valores, un producto de infinitos factores, o como ésta de la izquierda, mediante una torre de infinitas fracciones, con los números impares y los cuadrados perfectos.

Esta estructura de torre nos ha inspirado el siguiente ejercicio:

Ejercicio 3



a) Apoyada en la esquina de una habitación, queremos levantar una torre de cubos idénticos, formando pisos cuadrados uno sobre otro como aparece en la figura. Las caras superiores de los cubos son negras y las que miran hacia la derecha son grises. Naturalmente, ni todos los cubos se ven ni todas las caras de cada cubo se ven.

Para torres de distinta cantidad de pisos, debes averiguar cuántos cubos la forman (incluidos los que no se ven) y cuántas caras negras y cuántas caras grises son visibles. Hazlo para 3 pisos (como en la imagen), 5 pisos y para 10 pisos.

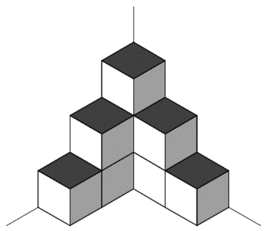
Solución

Cada piso es un cuadrado así que tienen 1, 4, 9, … cubos y cada torre tendrá 1, 1+4, 1+4+9, … cubos

En cuanto a las caras negras, si miramos la torre desde lo alto, veríamos tantas caras negras como cubos en el piso más grande.

Número de	Total de cubos	Caras negras	Caras grises visibles
3	1+4+9 = 14	9	1+2+3=6
5	1+4+9+16+25=55	25	1+2+3+4+5=15
10	55+36+49+64+81+100=385	100	15+6+7+8+9+10=55

b) Ahora decidimos hacer la torre poniendo sólo los cubos que quedan apoyados en las paredes y se tratar de responder a las mismas preguntas:



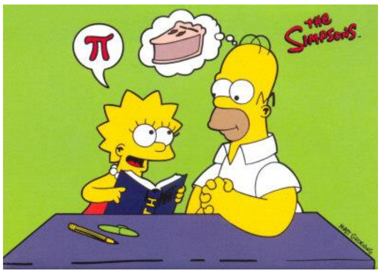
Solución

Cada nueva altura añade 2 cubos más a la cantidad de la altura anterior, así que la cantidad de cubos es 1+3+5+7+… También podemos observar que los cubos apoyados sobre una de las paredes, encajan con los apoyados sobre la otra pared, formando un cuadrado.

En cuanto a las caras negras, cada vez se ven 2 más: 1+2+2+2+…

Las grises, vistas justo desde enfrente serían 1+2+3+4+…

Número de	Total de cubos	Caras negras	Caras grises visibles
3	1+3+5=9	1+2+2=5	1+2+3=6
5	1+3+5+7+9=25	1+2+2+2+2=9	1+2+3+4+5=15
10	25+11+13+15+17+19=100	1+2.9=19	15+6+7+8+9+10=55



π aparece en innumerables contextos. Parece que no tendrá nada que ver con el producto o la división de números. Sin embargo, si escogemos al azar dos números enteros positivos, la probabilidad de que no tengan divisores comunes es $\frac{6}{\pi^2}$

Ejercicio 4

Fíjate en el 2019, el año en el que estamos, que es un número formado por 4 cifras. ¿Puedes imaginarte un número formado por 2019 cifras? Esperemos que sí. Sobre estos números tan largos debes contestar a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos de ellos hay que cumplen que el producto de todas sus cifras es 1?

La única manera de factorizar el 1 es con todos los factores 1, así que sólo hay un número que cumpla las condiciones: 11111…11 (con 2019 cifras)

b) ¿Cuántos de ellos hay que cumplen que el producto de todas sus cifras es 3?

El 3 es primo así que sólo se puede factorizar como 3 por una serie de unos. Tenemos entonces 2019 posibilidades: 3 en la primera posición y 1 en las 2018 restantes; 3 en la segunda posición y 1 en las 2018 restantes y así sucesivamente hasta el número formado por 2018 unos y un 3 en la posición 2019

311111…11, 131111…11, 113111…11, …, 111111…31 y 111111…13

c) ¿Cuántos de ellos hay que cumplen que el producto de todas sus cifras es 9

9 se puede factorizar como 3.3 así que los números buscados son los que tengan un 9 y 2018 unos o bien 2017 unos y dos treses. Para el primer caso, como en el apartado **b)**, habrá 2019 posibilidades.

Se trata ahora de contar las formas de seleccionar las dos posiciones para los treses: por cada una de las 2019 diferentes posiciones para el primer 3, quedan las 2018 posiciones restantes para el otro. Esto hace un total de 2019.2018 diferentes elecciones para los dos treses, pero así estamos cada una dos veces: por ejemplo, elegir la posición 1 y luego la 2 o primero la 2 y luego la 1.

Así que habrá $\frac{2019.2018}{2} = 2037171$ posibilidades

En total tendremos 2019 + 2037171 = 2039190 posibilidades distintas

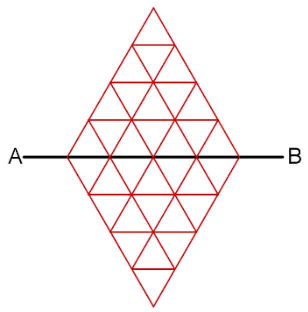
d) ¿Cuántos de ellos hay que cumplen que el producto de sus cifras es 2019?

El número 2019 sólo tiene dos factores primos: 673.3, así que no es posible escribir 2019 como el producto de 2019 números de una sola cifra.

Puesto que la lista de decimales de π no termina nunca y no sigue ningún patrón, es posible encontrar cualquier secuencia de dígitos en ella, con sólo avanzar lo suficiente. Por ejemplo, las cifras 13042019 que corresponden a la fecha de hoy, aparecen a partir de la posición 71$_1$625.402. En la posición 206$_1$828.521 encontramos 419**17320508**791579084 que son las primeras cifras de $\sqrt{3}$, número relacionado con el área y el perímetro de los triángulos equiláteros, como los que aparecen en el siguiente problema.

Ejercicio 5

Cada una de las dos mitades de esta figura está compuesta por 16 triángulos pequeños, de los cuales hay coloreados 3 de rojo, 5 de azul y 8 de verde. Al doblar la figura por la recta AB resulta que se superponen dos pares de triángulos rojos, tres pares de azules y encontramos dos pares rojo-verde. ¿Cuántos pares de triángulos verdes coinciden?



Marquemos los 16 colores de la mitad superior y sus parejas de la mitad inferior indicadas en el enunciado

R	R	R	A	A	A	A	A	V	V	V	V	V	V	V	V
R	R	V	A	A	A			R							

Queda por encontrar cómo se emparejan 2 triángulos azules y 7 verdes de abajo con los de arriba.

Con los azules de arriba, no pueden emparejarse más triángulos azules, así que deberán ser verdes (los rojos están identificados todos).

R	R	R	A	A	A	A	A	V	V	V	V	V	V	V	V
R	R	V	A	A	A	V	V	R							

Esto permite emparejar los dos azules restantes y por tanto, las parejas verde-verde, que serán 5

R	R	R	A	A	A	A	A	V	V	V	V	V	V	V	V
R	R	V	A	A	A	V	V	R	A	A	V	V	V	V	V