XXVII OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL SANTANDER 2016

Enunciados y soluciones de los problemas de la

Prueba Individual

CONVOCA

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ORGANIZA

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

PATROCINAN / COLABORAN

Real Sociedad Matemática Española

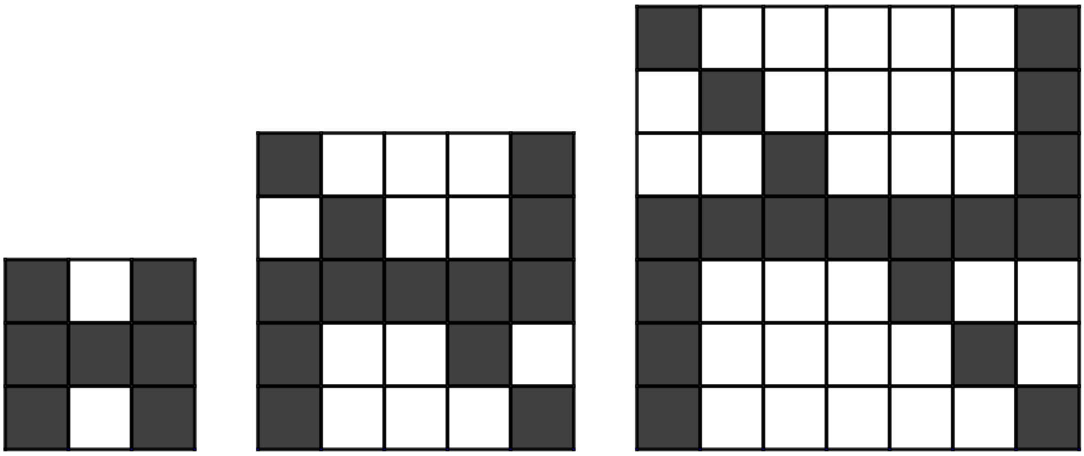
1. JULIÓBRIGA

Julióbriga (en latín *Iuliobriga*, literalmente *ciudad fortificada de Julio*, en memoria del padre adoptivo de Augusto, Cayo Julio César) fue la ciudad romana más importante de las nueve fundadas en Cantabria. Entre los restos destacan:

- El foro romano de la ciudad, de pequeñas dimensiones, edificado en lo alto de la loma, cerca y bajo la iglesia románica de Retortillo.
- Casa de los Morillos, del año 80 d. C.
- Casa de los Mosaicos, con llamativos pavimentos blancos y negros, termas y un hipocaustum.
- Tabernae, edificio tipo ínsula con aterrazamiento del terreno para poder albergar almacenes y comercios.

La imagen muestra las ruinas de la ciudad romana de Julióbriga (Retortillo, Campoo de Enmedio).

Alberto, tras una visita a Julióbriga, se entretiene diseñando sus propios mosaicos. Por el momento, está siguiendo un mismo patrón para construir mosaicos cuadrados, cada vez más grandes, con baldosas blancas y negras.



Mosaico 1 Mosaico 2 Mosaico 3

Alberto te formula las siguientes preguntas, que desea respondas con acierto.

a) ¿Cuántas baldosas negras se emplearán para construir el mosaico número 4?

b) ¿Cuántas baldosas negras se emplearán para construir el mosaico número 7?

c) ¿Cuál será el total de baldosas empleadas en el mosaico que tenga exactamente 121 baldosas negras?

d) ¿Podrá construirse un mosaico con un número de baldosas negras que sea múltiplo de 3?

SOLUCIÓN

a) El *Mosaico4* tendrá dos baldosas más de lado que el *Mosaico3*, es decir, será 9×9.

Para contar las baldosas negras podríamos desplazar las de la diagonal a los costados hasta formar una H. Tenemos dos filas verticales de nueve baldosas negras y una horizontal de dos baldosas menos que las verticales (las de los extremos). En total son $9 + 9 + 7 = 9 \cdot 2 + 7 = 25$ baldosas negras.

b) El *Mosaico7* tendrá $2 \cdot 7 + 1 = 15$ baldosas de lado y, por tanto, tendrá 43 baldosas negras pues $15 \cdot 2 + 13 = 43$.

c) En general, el *Mosaico*n tendrá $2n + 1$ baldosas por lado, y $(2n + 1) \cdot 2 + (2n - 1)$ baldosas negras.

Si buscamos uno que tiene en total 121 baldosas negras, es porque

$$(2n + 1) \cdot 2 + (2n - 1) = 121.$$

De donde se obtiene que $n = 20$ y que el número total de baldosas empleadas es

$$(2 \cdot 20 + 1)^2 = 1681$$

d) El número de baldosas negras del *Mosaico*n es $(2n + 1) \cdot 2 + (2n - 1) = 6n + 1$, que al dividirlo entre 3 da de resto 1 (y cociente $2n$). Por tanto, no puede construirse un mosaico con un número de baldosas negras que sea múltiplo de 3.

2. EL SARDINERO Y ALREDEDORES

Si hay una zona que caracterice la ciudad de Santander, y que es turística por excelencia, es la conocida como El Sardinero. En ella se encuentran las playas de El Sardinero, La Concha, Mataleñas, El Camello y La Magdalena. En la península de La Magdalena se ubica el palacio del mismo nombre, Palacio de La Magdalena, que es un símbolo de la costa santanderina. En verano la actividad en dicha península es intensa; el palacio es sede de los cursos de verano de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo y en su campa se celebran desde conciertos a concursos de hípica. Un paseo por El Sardinero permitirá contemplar los Jardines de Piquío y una buena parte de la arquitectura más noble de la ciudad. La imagen muestra una vista de la Primera Playa de El Sardinero, con el Gran Casino Sardinero al fondo.

Algunos estudiantes del Grado de Matemáticas han estado realizando un trabajo estadístico sobre la actividad de las personas que están en la Primera Playa de El Sardinero entre las 10:00 h y las 11:00 h. Acerca del jueves pasado tienen los siguientes datos:

A las 10:00 h, en la arena de la playa, hay dos grupos de personas: uno es de niños y otro es de adultos.

A los 10 minutos llegan a la arena siete adultos más y seis de los niños que había en la arena van a bañarse.

Después de 20 minutos más, llega a la arena otro grupo distinto de niños, cuyo número es el doble de los que había. Al mismo tiempo, cinco adultos que estaban en la arena van a bañarse.

Tras otros 15 minutos, seis adultos y la mitad de los niños que permanecían en la arena van a bañarse.

A las 11:00 h se incrementa en ocho el número de adultos que están tomando el sol en la arena y se mantiene el número de niños. En ese momento, en la arena, hay el doble de adultos que de niños.

Sabiendo que a las 11:00 h había 36 personas en la arena,

a) ¿cuántos adultos y cuántos niños había en la arena las 10:50 h?

b) ¿cuántos adultos y cuántos niños había en la arena a las 10:00 h?

SOLUCIÓN

Si a las 11:00 hay el doble de adultos que de niños y en total son 36 personas, 24 son adultos y 12 son niños. Como se había incrementado en 8 el número de adultos, es que justo antes había 16 adultos y 12 niños.

Quince minutos antes, se habían ido de la arena 6 adultos, luego había 22; y también se habían ido la mitad de los niños, luego antes de eso había el doble: 24.

Siguiendo de esta manera, podemos establecer el siguiente cuadro:

	11:00	10:45	10:30	10:10	10:00
Adultos	24	16	22	27	20
Niños	12	12	24	8	14

a) ¿Cuántos adultos y cuántos niños había en la arena las 10:50 h?
Había 16 adultos y 12 niños.

b) ¿Cuántos adultos y cuántos niños había en la arena a las 10:00 h?
Había 21 adultos y 14 niños.

3. BOLOS

En Cantabria el juego de los bolos es uno de los más arraigados. Durante el desarrollo del juego, cada jugador debe derribar el mayor número de bolos, de un total de nueve - sin contar el emboque-, mediante el lanzamiento de una bola. Los bolos suelen estar confeccionados en madera de avellano o de abedul y disponen de una base de metal llamada argolla; tienen 45 cm de alto y 5 cm de diámetro. La bolera, lugar donde tienen lugar los lanzamientos, es de forma rectangular y consta de tres partes: tiro, caja y birle; y, aunque no tiene unas medidas fijas, se establecen como idóneas 34×8 m.

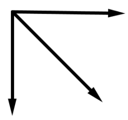
Proponerte en esta prueba olímpica jugar a los bolos resultaría complicado; por ello, se ha ideado otro juego. Lee atentamente las condiciones del que te planteamos, en el que, como homenaje a ese tradicional juego, se ha incluido un bolo en su presentación.

En este juego participan dos personas, Ana y Blas. Gana el juego quien logre colocar el bolo en la casilla 30, de acuerdo con las siguientes reglas:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30

Regla 1 Comienza Ana moviendo el bolo. A continuación, lo mueve Blas desde la posición en que lo dejó Ana; después, mueve de nuevo Ana desde la posición en que lo dejó Blas; y así sucesivamente.

Regla 2 Cada jugador, en su turno, puede mover el bolo una o más posiciones (una o más casillas) siempre que sea en horizontal hacia la derecha, en vertical hacia abajo, o en diagonal hacia la derecha y hacia abajo.



Se pide:

a) Si un jugador deja el bolo en la posición “10”, indica los números de las casillas, ordenados de menor a mayor, a las cuales puede mover el bolo el otro jugador en el siguiente movimiento.

b) Se llaman “casillas perdedoras” a las casillas en las que si un jugador coloca el bolo, siempre perderá si el otro jugador juega adecuadamente.

Indica, ordenada de menor a mayor, la numeración de diez“casillas perdedoras”.

c) Se llaman “casillas ganadoras” a aquellas en las que cuando un jugador coloca el bolo, siempre ganará, si juega adecuadamente, con independencia de lo que haga el otro jugador.

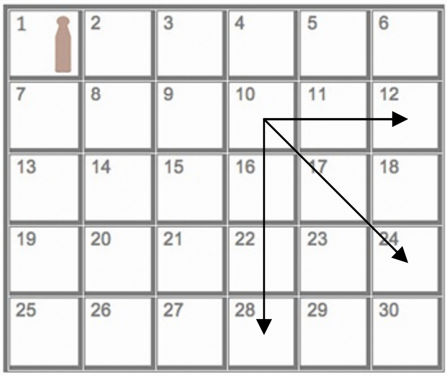
Indica, ordenada de menor a mayor, la numeración de dos“casillas ganadoras”.

d) Este juego no es equitativo ya que si el primer jugador, en este caso Ana, juega adecuadamente, siempre gana.

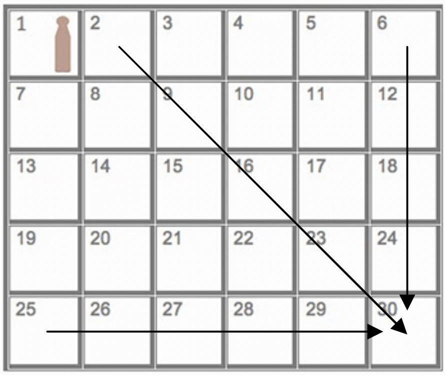
Señala la numeración de dos casillas a las que Ana puede mover el bolo en el primer movimiento para ganar con seguridad.

SOLUCIÓN

a) Podría mover a las casillas 11, 12, 16, 17, 22, 24 y 28.



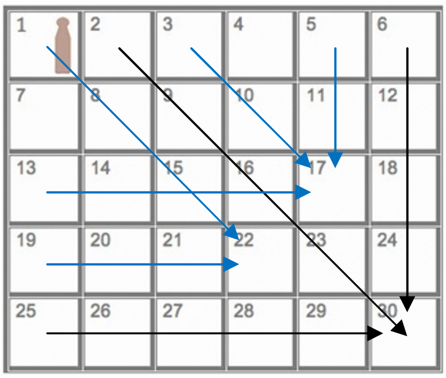
b) Las casillas 2, 6, 9, 12, 16, 18, 23, 24, 25, 26, 27, 28 y 29 son claramente perdedoras porque el siguiente jugador podría mover a la casilla 30.



c) En el diagrama del apartado b) se ve que las casillas 17 y 22 son ganadoras porque el siguiente jugador tiene que mover necesariamente a una perdedora.

d) Visto que las casillas 17 y 22 son ganadoras, podemos detectar más casillas perdedoras: 1, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 19, 20 y 21

Queda claro que la casilla 7 también es ganadora, así que el primer jugador ganará si mueve a la casilla 22 (gana en la siguiente) o a la casilla 7 (gana en dos movimientos).



Observación:
La distribución de las casillas del tablero es

- Ganadoras: 7, 17, 22
- Perdedoras: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29
- Especiales: 1 (inicio de juego) y 30 (fin de juego)

4. POSTRES TÍPICOS

La *quesada pasiega* es un postre típico de los Valles Pasiegos, una comarca de Cantabria, y uno de los platos más representativos de la gastronomía de la región. Se compone de leche de vaca cuajada que se acompaña de mantequilla y harina de trigo, huevos y azúcar. La mezcla se suele aromatizar con limón rallado y canela en polvo. Por otra parte, está el *sobao pasiego*, que es otro producto de repostería tradicional. Su popularidad ha hecho que, hoy en día, se comercialice en toda España, aunque la versión de Cantabria es diferente a la general. Se ignora el origen histórico de este bizcocho, aunque con toda probabilidad fue producto del uso espontáneo de las materias primas comunes en el entorno rural cántabro: mantequilla y harina.

En una confitería de Cantabria se venden bandejas con diferentes dulces típicos, elegidos entre los siguientes, a los que más tarde nos referiremos sólo mediante la letra que les acompaña.

Quesadas (Q), Sobaos (S), Arroz con leche (L), Corbatas de Unquera (C),
Polkas de Torrelavega (P), Pantortillas de Reinosa (R), Almendrados (A) y
Tarta de hojaldre y mantequilla (T)

Las bandejas de dulces se confeccionan según las siguientes condiciones:

- Si A está incluido en una bandeja, entonces Q también debe estar incluido en la misma bandeja.
- Si P está incluido en una bandeja, entonces S también debe estar incluido en la misma bandeja.
- Si C no está incluido en una bandeja, entonces R sí debe estar incluido en esa bandeja.
- Si C está incluido en una bandeja, entonces S debe estar incluido en la misma bandeja.
- L y P no pueden ser incluidos ambos en la misma bandeja.
- P está incluido en una bandeja si y sólo si A también está incluido en esa bandeja.

Ayuda a los confiteros en la preparación de las bandejas, respondiendo a las siguientes preguntas:

a) ¿Es cierto que una bandeja puede tener hasta siete dulces diferentes? ¿Es cierto que una bandeja puede tener un solo dulce? Razona tus respuestas.

b) Si P está incluido en una bandeja, justifica cuál de las siguientes parejas de dulces deben estar incluidos en la misma bandeja:

b1) Q y C   b2) A y S   b3) T y R

c) Si S no está incluido en una bandeja, ¿cuál de las siguientes listas representa la lista completa de los dulces que obligatoriamente deben estar incluidos?

c1) R, Q y A   c2) R y Q   c3) R   c4) Q, T, R y L

d) Si los confiteros desean comercializar una bandeja con exactamente cinco dulces, ¿cuál de las siguientes combinaciones es aceptable?

d1) P, A, S, Q y T   d2) R, L, S, T y Q   d3) C, R, L, S y Q

SOLUCIÓN

a) ¿Seis dulces?
La quinta condición exige que no pueden estar simultáneamente L y P. Por la condición seis, si faltara P, también tendría que faltar A. Así que la respuesta es poner todos los dulces salvo el L y se satisfarán todas las condiciones.
¿Un único dulce?
Si estuviese C, entonces, por la cuarta condición, también tendría que estar S y habria más de uno. Así que C no puede estar y la condición tres exige que entonces esté R. La bandeja con el dulce R exclusivamente, cumple todos los requisitos.

b) Por estar P, la segunda condición exige que también esté S y la sexta, que esté también A, así que la respuesta correcta es b2).

c) Al no estar S, las condiciones dos y cuatro impiden que estén P y C. Al no estar C, tendrá que estar R. Podría haber más dulces, pero el único que es exigible es R así que la respuesta es c3).

d) La opción d1) no cumple la segunda condición. Observar que como no está C, tendria que estar R
Tanto d2) como d3) verifican todas las condiciones.

5. MITOLOGÍA CÁNTABRA

El *Ojáncano*, la *Guajona*, la *Anjana* o el *Lantarón* son nombres que se habrá encontrado toda persona que haya estado interesada por conocer los aspectos elementales de la mitología cántabra, poblada tanto de seres malévolos como de otros bondadosos y hermosos, de unos juguetones y bromistas junto a otros cuyo deseo sólo es ayudar. Se pueden encontrar brujas y animales imposibles de tierra y de mar, ninfas y sirenas, duendes y semidioses.En el libro *Monstruos, Duendes y Seres Fantásticos de la Mitología Cántabra* hay información detallada sobre todos estos seres.


Trastolillo


Musgoso


Ojáncano


Anjana

En honor a esos personajes mitológicos cántabros, vamos a dar nombres de algunos de ellos a unos tipos de números que se han colado en el siguiente problema.

Vamos a llamar número *trastolillo* a cada número natural que verifique una y sólo una de las dos condiciones siguientes y vamos a llamar número *musgoso* a cada número natural que verifique ambas condiciones simultáneamente. Las condiciones son:

- Ser múltiplo de 7
- Al dividirlo entre 5 se obtiene de resto 2

a) Escribe los tres primeros números trastolillos y los tres primeros números musgosos.

b) Acerca de la cantidad de números musgosos que están comprendidos entre 1 y 2016, se sabe que:

- es un número par de dos cifras
- tiene exactamente cuatro divisores
- la diferencia entre los dos divisores medianos es el cubo de un número

¿Cuál es la cantidad de números musgosos comprendidos entre 1 y 2016?

c) Determina la cantidad de números trastolillos que están comprendidos entre 1 y 2016.

SOLUCIÓN

a) Los primeros números *trastolillos* son $2, 12, 14, 17, 21, 22, 27, 28, 32, \ldots$
Los primeros números *musgosos* son $7, 42, 77, 112, \ldots$
Sólo habría que elegir en cada caso los tres primeros.

b) Todo número tiene, al menos, dos divisores: el 1 y el propio número. El que buscamos es par, así que, si lo llamamos n, sus cuatro divisores son $1, 2, \frac{n}{2}$ y n. La diferencia entre $\frac{n}{2}$ y 2 es un cubo, y puesto que n es de dos cifras, dicha diferencia sólo puede ser $1, 8, 27$ o 64, con lo cual $\frac{n}{2}$ será $3, 10, 29$ o 66. Por tanto, inicialmente n puede ser $6, 20, 58$ o 132. La primera y la última opciones están descartadas porque no son números de dos cifras y queda descartada la segunda, porque el número 20 tiene más de cuatro divisores ($1, 2, 4, 5, 10$ y 20).

Así pues, 58 es el único número par de dos cifras con cuatro divisores ($1, 2, 29$ y 58), para el que la diferencia de sus divisores medianos es un cubo: $27 = 3^3$. Es decir, hay 58 números *musgosos* entre 1 y 2016.

También se podría haber calculado la cantidad de números *musgosos* directamente, prescindiendo de la información suministrada: un número musgoso es de la forma 7.*n* y que termine en 2 ó en 7 (para que al dividirlo entre 5 se obtenga de resto 2). Por tanto *n* tiene que terminar en 6 o en 1 y tiene que ser menor o igual que 288 (para que 7.*n* no supere 2016). Así que los números *musgosos* comprendidos entre 1 y 2016 son 7.*n* donde *n* es 1, 6, 11, 16, 21, 26, ..., 281 ó 286, es decir, dos números *musgosos* en cada decena hasta la del 280 y son 29 decenas, así que en total hay $2 \cdot 29 = 58$ números *musgosos*.

c) Entre 1 y 2016 hay 288 múltiplos de 7 (desde $7 \cdot 1 = 7$ hasta $7 \cdot 288 = 2016$), es decir, hay 288 números que cumplen la primera condición de las dos dadas en el enunciado.

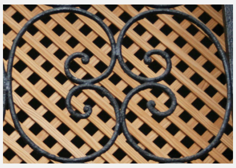
Por otro lado, un número que al dividirlo entre 5 dé de resto 2, se puede escribir como $5c + 2$ (donde c representa el cociente de la división). De este tipo de números hay un total de 403 (desde $5 \cdot 0 + 2 = 2$ hasta $5 \cdot 402 + 2 = 2012$).

Como había 58 números *musgosos* (que cumplían simultáneamente ambas condiciones), habrá $288 + 403 - 58 - 58 = 575$ números que cumplen sólo una de las condiciones. Es decir, 575 es la cantidad de números *trastolillos* que están comprendidos entre 1 y 2016.

6. PASEANDO POR LA CIUDAD DE SANTANDER

Si hay algo que no pasa desapercibido a los ojos de las personas que disfrutan con las matemáticas son las formas geométricas que pueden observar cuando pasean por una ciudad, cualquier ciudad. Las imágenes siguientes sólo conforman una muestra de lugares que se pueden contemplar al transitar por las calles de Santander y que, cuando la observación de los mismos se acompaña de tintes geométricos, su resultado es la combinación, como mínimo, de tres elementos: belleza, admiración y cierto estímulo para el estudio. Las imágenes mostradas son gentileza de los autores del libro *Santander, mirar y ver… matemáticas, arquitectura e historia*, publicado por Ediciones Universidad Cantabria.

Detalle del mirador de la fachada posterior del Edificio de Correos



Ventana de la sacristía de la iglesia del Cristo de la Catedral

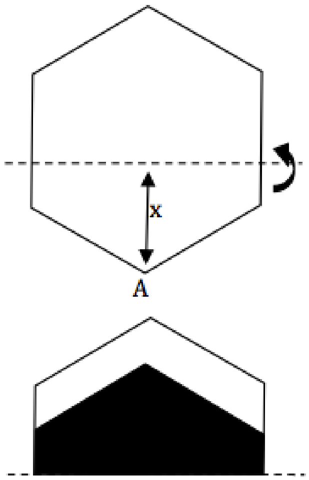
Mosaicos en los pilares de la barandilla del Paseo Reina Victoria

Fachada del Palacio de Festivales

Sin duda, una de las situaciones que podemos encontrarnos en cualquier ciudad es la de pasear por una acera pavimentada con hexágonos regulares, motivo por el cual es la figura estrella del problema que se plantea a continuación.

La figura de la derecha representa un hexágono regular de lado 12 cm. El hexágono es blanco por una cara y negro por la otra. Lo doblamos por una línea horizontal (perpendicular a dos lados) a una distancia x del vértice A, tal y como ilustra la figura.

Halla la distancia x para que la parte blanca y la parte negra que queden a la vista tengan el mismo área.



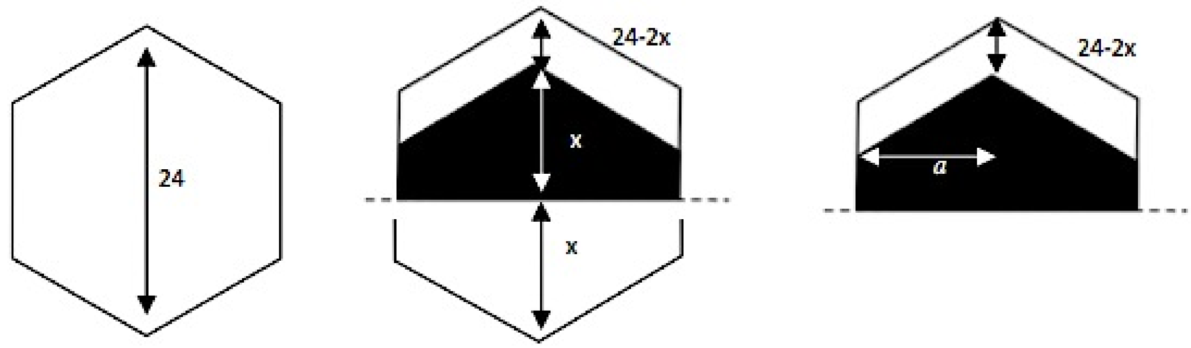
SOLUCIÓN

El área del hexágono completo es

$$\frac{1}{2}\,6 \cdot 12 \cdot a$$

donde a es la apotema del hexágono. Para que la parte blanca y la negra tengan el mismo área, el área de la parte blanca debe ser la tercera parte de la del hexágono, es decir $12 \cdot a$.

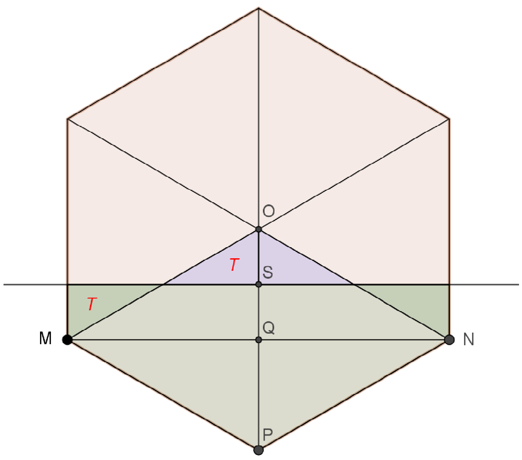
Calculemos el área de la zona blanca de la figura doblada:



Está formada por dos paralelogramos, ambos de base $24 - 2\mathrm{x}$ y altura la apotema del hexágono, así que su área es $2 \cdot (24 - 2\mathrm{x}) \cdot a$.

Se tiene entonces que $2 \cdot (24 - 2\mathrm{x}) = 12 \Longrightarrow 24 - 2\mathrm{x} = 6 \Longrightarrow \mathrm{x} = 9$ cm

Reproducimos también, por su elegancia y sencillez, la solución que proporcionó uno de los estudiantes:



1.- El trozo que doblamos (en verde) debe ser la tercera parte del área total.

2.- Como el área total tiene 6 triángulos, el área a doblar debe tener sólo dos triángulos.

3.- Éso se consigue partiendo por la mitad los segmentos OM y ON, puesto que los triángulos *T* son iguales y se compensan.

4.- Como consecuencia, el segmento OQ también queda dividido por el punto medio S.

$$\overline{PQ} = 6 = \overline{OQ} \Rightarrow \overline{PS} = 6 + 3 = 9$$