

GEOMETRÍA, COMUNICACIÓN Y TECNOLOGÍAS DIGITALES

VII Jornadas Enseñanza de las Matemáticas Cantabria
Nuria Joglar Prieto (URJC)

nuria.joglar@urjc.es



¿SOBRE QUÉ VAMOS A HABLAR Y A REFLEXIONAR HOY?

- Comprensión de ideas matemáticas.
- Fundamental las representaciones y sus conexiones.
 - Ejemplo 1: Modelo de Lesh.
- El lenguaje en el aula de matemáticas: la importancia de la comunicación oral y escrita.
 - Imprescindible trabajo en equipo. Comunidad matemática en el aula.
- ¿Y las tecnologías digitales? ¿Cómo pueden ayudar?
 - Ejemplo 2: Instrumentalismo.
- En detalle: Geometría 2.0. Modelo usado en Primaria.
 - Ejemplo 3: Conceptos figurales de Fishbein. Cuidado con los prototipos.

¿CUALIDADES DE UN
BUEN PROFESOR DE
MATEMÁTICAS?

CUALIDADES DADAS POR PARTICIPANTES 27 FEBRERO 2016

- Paciencia, empatía.
- Optimismo, ilusión, transmitir lo que son las matemáticas. Entusiasmo, disfrutar con lo que se hace. Pasión. Motivación.
- Comunicar bien.
- Renovación constante, dedicación. Abierto a innovar.
- Saberse poner en el lugar del alumno, respeto y aceptación por el otro.
- Crear clima de confianza. Inteligencia emocional.
- Ordenado, al grano, no cuenta motivos, objetivo: aprobar (estas son las respuestas de los alumnos de secundaria de Arturo).
- Contextualizar, utilidad, usar la historia, TDs,...

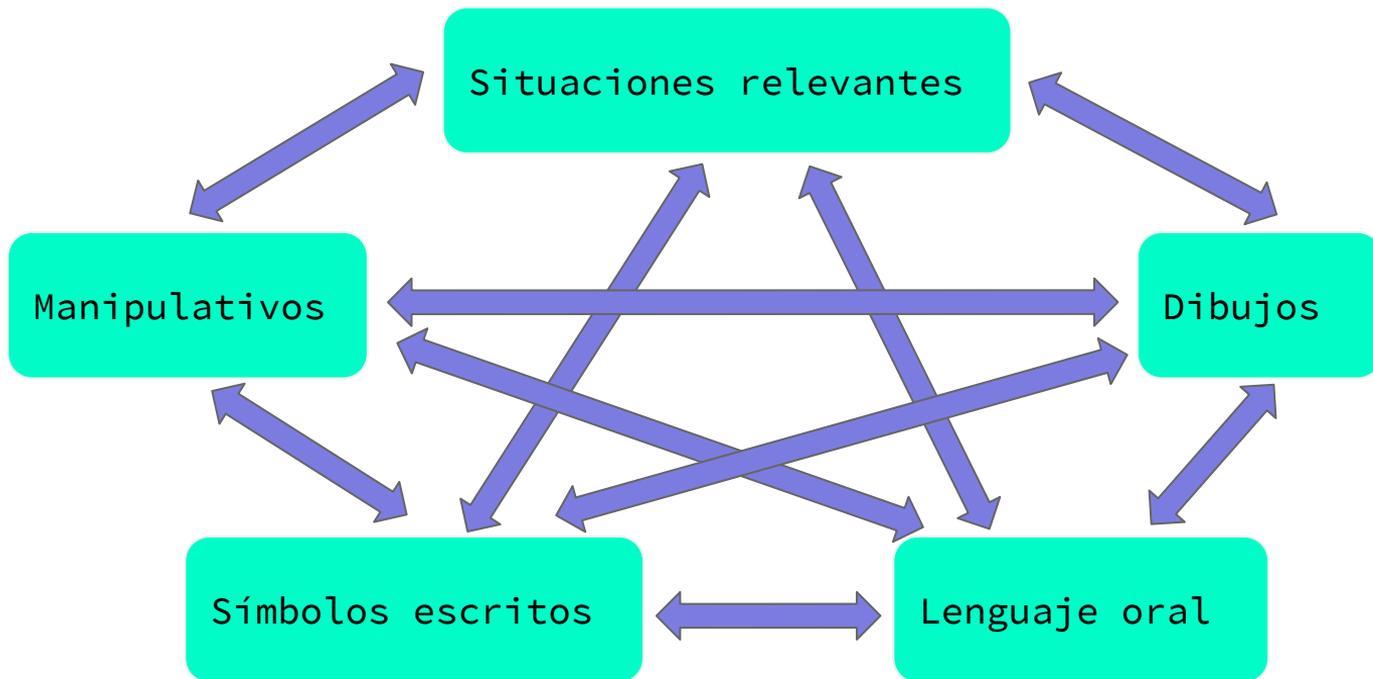
¿A QUÉ NOS DEDICAMOS LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS?

La misión más importante del profesor de matemáticas es ayudar a sus alumnos a desarrollar la **comprensión matemática**.

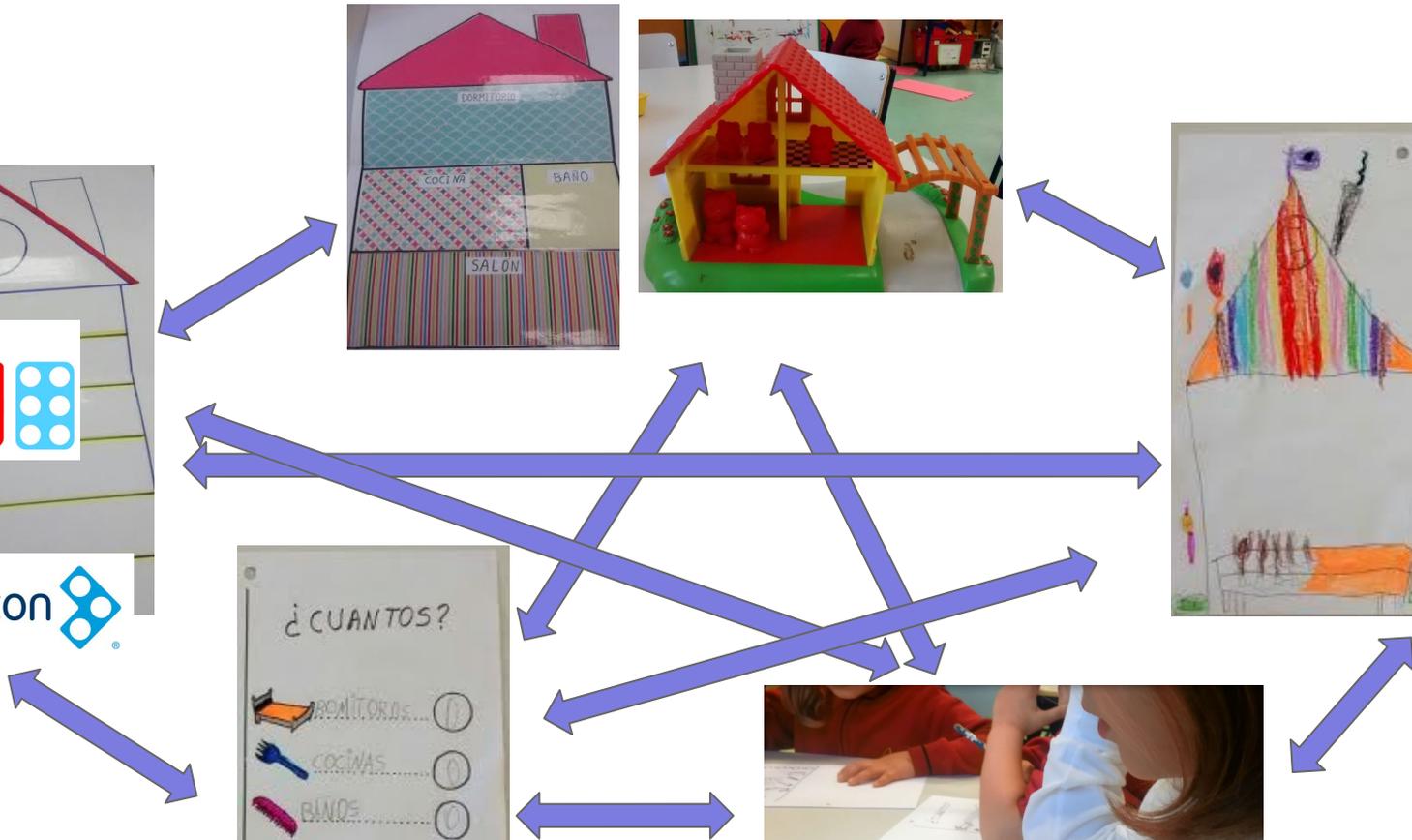
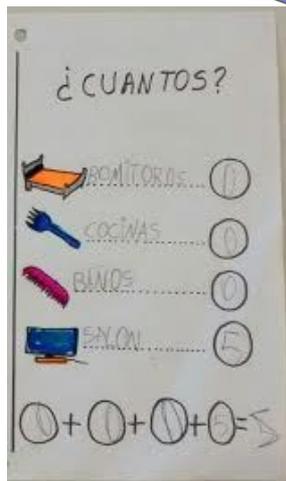
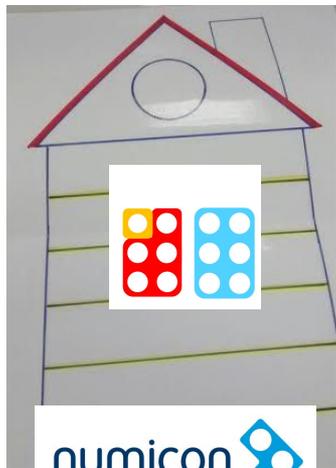
Fomentando la creación de una **comunidad** de matemáticos en el aula, con **rigor** y **buen ambiente**. Favoreciendo la experimentación, la manipulación (tradicional y con tecnologías), el trabajo en equipo, la comunicación, hacia la abstracción: comprensión de ideas matemáticas.

COMPRENSIÓN IDEAS
MATEMÁTICAS Y
DISEÑO DE TAREAS

REPRESENTACIONES Y CONEXIONES: *MODELO DE LESH (1987)*



DISEÑO DE TAREAS
INFANTIL, 5 AÑOS
(EN PROCESO)



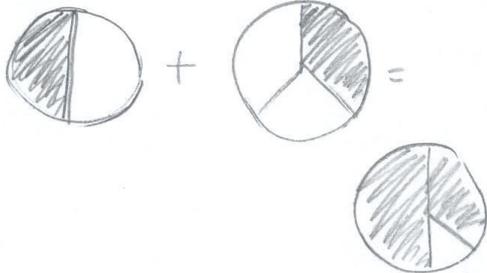
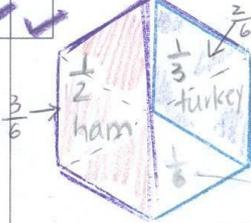
¿PODÉIS DISEÑAR UNA
TAREA PARA QUE LOS
ALUMNOS COMPRENDAN
LAS FRACCIONES?

PEQUEÑAS TAREAS PROPUESTAS POR PARTICIPANTES 27-02-2016

- Fiesta de cumpleaños: hay 8 niños, encargamos pizzas. Preguntamos a los niños por sus gustos, y repartimos. Cartulina (modelo 1 manipulativo), legos (modelo 2 manipulativo), pedirles que lo dibujen, símbolos (sumas de fracciones, restas,...), enfatizar fracciones mayores que 1.
- Tablet de chocolate en el aula, distintos tipos de tabletas (todas rectangulares), fracción de fracción, suma y resta de fracciones, hay más de una tableta para trabajar fracciones mayores que 1. Bolsas caramelos variados: proporción (mantenimiento cambiando el contenido total pero respetando proporciones de sabores).
- Play store: aplicaciones matemáticas auto-validación (tablet, 5º y 6º).
- El muro de cristal. ¿Por qué las matemáticas parecen tan difíciles? de Frank Smith, Ed. Morrón (cooperación educativa Kikiriki, 2005, ISBN: 84-89042-41-1).
- Clara Grima, <http://claragrama.com/> y mati y sus mateaventuras está ahí el enlace también.
- Matific, libro digital combinado, ...<https://www.matific.com/es/es>

EN PRIMARIA DISEÑO DE TAREAS: MODELO DE LESH (1987)

Modeling Math Meaningfully

<p>I can write it with numbers!</p> $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ <p>$\frac{1}{2}$ can be made into $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{3}$ can be made into $\frac{2}{6}$ →</p>	<p>I can draw a picture of it.</p> 
<p>My mom bought $\frac{1}{2}$ pound of ham and $\frac{1}{3}$ pound of turkey for a huge sub. How much meat did she buy?</p> <p>I can write a story problem.</p>	<p>I can model it using <u>pattern blocks</u> math tools and explain my thinking</p>  <p>$\frac{3}{6}$ I put the $\frac{1}{2}$ piece red trapezoid with the $\frac{1}{3}$ rhombus and saw that one green triangle would fit. That makes the rest equal $\frac{5}{6}$.</p>

COMUNICACIÓN Y LENGUAJE: FOMENTAR

El **lenguaje** ayuda a los niños a **construir enlaces** entre sus *experiencias matemáticas informales* y los *símbolos abstractos* usados en la matemática formal. Facilita su autonomía.

El **lenguaje** facilita las **conexiones entre diferentes representaciones de una idea matemática (*flexibilidad matemática*)**. Ayuda pues a generalizar, a explorar relaciones,...

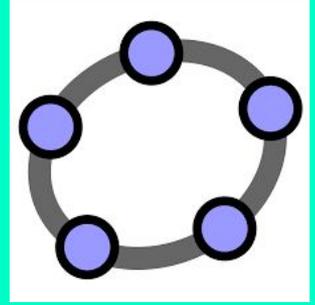
Para promover y optimizar el uso del lenguaje oral: **trabajo grupal para compartir y consolidar ideas matemáticas**. Estar activos.

Escribir (en la medida de sus posibilidades) sobre matemáticas ayuda a los alumnos a aclarar su pensamiento y a profundizar su comprensión.

RETO: COORDINAR LA
DIDÁCTICA DEL S. XXI
CON LA TECNOLOGÍA
DEL S. XXI

ENSEÑAR MATEMÁTICAS CON TECNOLOGÍAS Y ÉNFASIS EN LA COMUNICACIÓN

Representaciones



Comunicación



¿TECNOLOGÍAS?

1. PAPEL DEL PROFESOR

2. APRENDIZAJE

EL INSTRUMENTALISMO (MARCO INICIALMENTE FRANCÉS)

- Un posible marco teórico para analizar cómo incorporar la tecnología en el aula de matemáticas.
 - “Orquestación”: papel del profesor, los alumnos y los instrumentos en el aula.
 - “Génesis instrumental”: cómo afectan las tecnologías digitales a la comprensión del objeto matemático.
- Interacción bidireccional entre el alumno y la herramienta tecnológica elegida.



UN EJEMPLO: “GEOMETRÍA 2.0”

Trabajo conjunto:

José María Sordo Juanena, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, UCM (jmsordo@ucm.es)

Jon Star, Harvard Graduate School of Education, EEUU (jon_star@harvard.edu)

GEOMETRÍA 2.0: NUESTROS OBJETIVOS

- Describir el **papel óptimo del profesor** dentro de Geometría 2.0. ¿A qué retos se enfrenta el profesor de matemáticas al trabajar en estos entornos con tecnología?
- Analizar cómo los dos ingredientes fundamentales de Geometría 2.0, la comunicación (a través de un blog) y la geometría dinámica (con GeoGebra), pueden afectar el **aprendizaje de las figuras geométricas básicas** de los alumnos de tercer ciclo de primaria en contexto real.
- Iniciar una **colaboración** entre investigación y práctica en nuestra comunidad educativa.

GEOMETRÍA 2.0: MARCO TEÓRICO ENSEÑANZA GEOMETRÍA

- La **teoría de los conceptos figurales** [Fischbein, Educational Studies of Mathematics, 1993].
- Las figuras geométricas son entidades mentales que tienen a la vez características conceptuales (abstractas, axiomáticas) y figurales (visuales, forma, posición, magnitud). Combinar con ideas del Modelo de Lesh.
- La enseñanza debe promover continua y sistemáticamente la fusión entre la “imagen” y el “concepto” de una figura geométrica dada para razonar sobre ella.

GEOMETRÍA 2.0: MARCO TEÓRICO ENSEÑANZA GEOMETRÍA

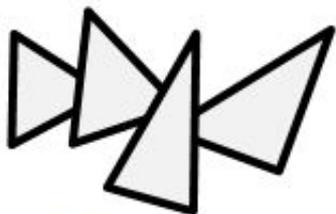
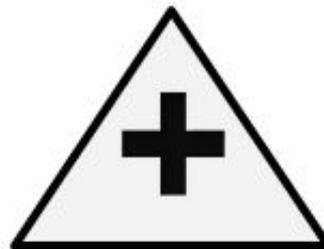
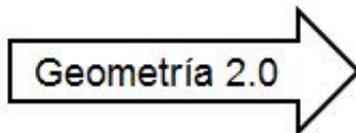


Figura: imagen
Triángulo

Concepto

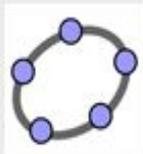
Puntos y lados
Ángulos y su medida
Longitudes y su medida
Ortogonalidad, paralelismo
Invarianza
Alineación
Puntos notables
...



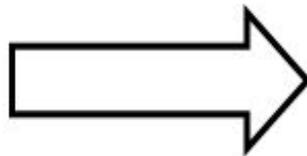
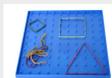
Concepto Figural

- Representación geométrica: estaría dentro de la representación simbólica más abstracta, conectada con la imagen mental.
- Representación gráfica: dibujos, representación “tangible”, en papel.
- Representación con materiales manipulativos: Geoplano y GeoGebra.
- Representación verbal: mensajes en el blog.

GEOMETRÍA 2.0: MARCO TEÓRICO GEOMETRÍA CON TECNOLOGÍA



Figuras Geométricas:
Triángulo y cuadrilátero
6º Primaria



Figural Concept

GEOMETRÍA 2.0: PUNTO DE PARTIDA FASE 1

Trabajo conjunto:

José María Sordo Juanena, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, UCM (jmsordo@ucm.es)

Jon Star, Harvard Graduate School of Education, EEUU (jon_star@harvard.edu)

ÉNFASIS EN LA COMUNICACIÓN: “JUEGO DE LOS MENSAJES”

¿Podrías escribir un mensaje para que un compañero dibujara un cuadrado sin usar la palabra cuadrado?

¿Podrías escribir un mensaje para que un compañero dibujara un triángulo sin usar la palabra triángulo?

MENSAJES DADOS EN TALLER 27 FEBRERO 2016

- Dibuja un círculo y coloca cinco puntos en la circunferencia, únelos secuencialmente. (pentágono)
- Dibuja una tele/ventana que tenga los cuatro lados iguales.
- Jugando la juego de las gomas, pinta el dibujo que te queda con tres dedos estirando la goma (triángulo).

ÉNFASIS EN LA COMUNICACIÓN: “JUEGO DE LOS MENSAJES”

Algunos ejemplos reales de alumnos de 6º (cuadrado):

DIBUJA DOS RECTAS PARALELAS HORIZONTALES DE LA MISMA LONGITUD Y OTRAS DOS VERTICALES CON LA MISMA LONGITUD, DE FORMA QUE FORMEN UN POLÍGONO REGULAR

Es un polígono de cuatro líneas: que tiene dos líneas verticales y dos horizontales.

Dibuja un polígono de cuatro lados.

Es un polígono de 4 lados: tienen 2 verticales y 2 horizontales.

DIBUJA UNA FIGURA GEOMÉTRICA DE CUATRO LADOS IGUALES

DIBUJA CON CUATRO PALITOS:DOS EN VERTICAL Y DOS EN HORIZONTAL

Tienes que dibujar una pared de un cubo.

Tiene cuatro lados y es la mitad de un rectángulo.

ÉNFASIS EN LA COMUNICACIÓN: “JUEGO DE LOS MENSAJES”

Algunos ejemplos reales (cuadrado):

- Es un cuadrilátero, paralelogramo que tiene cuatro lados y cuatro ángulos iguales, y se llama...
- Figura plana, cuadrilátero, paralelogramo, que tiene cuatro lados y cuatro ángulos iguales y entre todos sus ángulos tienen que formar 360° .
- Es un polígono regular de cuatro lados iguales con cuatro ángulos rectos.

Cuadrado:

- Paralelogramo
- Cuadrilátero
- Lados iguales
- Angulos iguales
- Cuatro angulos rectos
- Poligono regular de 4 lados
- Suma de ángulos 360°

ÉNFASIS EN LA COMUNICACIÓN: “JUEGO DE LOS MENSAJES”

Algunos ejemplos reales de alumnos de 6º (triángulo):

DIBUJA UN POLÍGONO DE TRES LADOS

Tienes que hacer un polígono de tres puntas, las unidas mediante líneas rectas.

Tiene 3 vértices y 3 ángulos agudos

Es un polígono de 3 lados que tiene 2 líneas inclinadas y tiene 1 línea horizontal

DIBUJA UNA FIGURA GEOGRÁFICA DE TRES LADOS IGUALES.

Tiene tres lados, forma de pirámide y es la mitad de un rombo.

Tiene tres lados que pueden ser iguales o desiguales

PARAMOS UN MOMENTO DISEÑAMOS Y COMPLETAMOS UNA TAREA

- ¿Cómo comprobar que los mensajes “funcionan”?
- ¿Qué otras palabras se pueden “prohibir”?
- ¿Qué materiales/recursos podemos utilizar?
- ¿Organización del aula?
- ¿Qué figuras diferentes podemos considerar?

ÉNFASIS EN LA COMUNICACIÓN: “JUEGO DE LOS MENSAJES”

Buscamos diferencias y similitudes en los distintos mensajes con los alumnos (en paralelo: póster).

Aparecen cuestiones de lógica (matemática).

Condiciones necesarias; condiciones suficientes,...

Seguimos haciendo preguntas:

¿Es un rectángulo un cuadrado? vs. ¿Es un cuadrado un rectángulo?

GEOMETRÍA 2.0: FASE 2

Trabajo conjunto:

José María Sordo Juanena, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, UCM (jmsordo@ucm.es)

Jon Star, Harvard Graduate School of Education, EEUU (jon_star@harvard.edu)

EJEMPLO ACTIVIDAD FASE 2 EN GEOMETRÍA 2.0

- Tareas abiertas, de exploración.
 - Puntos notables de un triángulo. ¿Cuáles están siempre alineados?
 - Los construyen en papel con herramientas de dibujo y lápices de colores.
 - Usan applet de GeoGebra (creado por Manuel Sada).
 - Ellos construyen los puntos notables y la recta de Euler con GeoGebra.
- Tareas de exploración hacia la idea de demostración.
 - ¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo? Varios registros de representación: papel, lápiz y tijeras, papel, lápiz y herramientas de dibujo, GeoGebra (applet), GeoGebra (construyen los alumnos).

ORGANIZACIÓN DE ACTIVIDAD FASE 2 EN GEOMETRÍA 2.0

- Pizarra digital y ordenadores apagados. En grupos pequeños los alumnos dibujan triángulos, “colorean sus ángulos” y los recortan para luego pegarlos consecutivamente.
- Encienden los ordenadores, y un representante de cada grupo explica sus conclusiones en el blog. El profesor recibe así la información y la analiza.
- El profesor guía: proyecta las construcciones de los alumnos y luego usa GeoGebra desde la pizarra digital en paralelo leyendo los mensajes seleccionados de los alumnos en el blog, y da una demostración de la propiedad buscada, haciéndola ya explícita.

ORGANIZACIÓN DEL ENTORNO

Trabajo conjunto:

José María Sordo Juanena, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, UCM (jmsordo@ucm.es)

Jon Star, Harvard Graduate School of Education, EEUU (jon_star@harvard.edu)

INTERVENCIÓN COMPLETA

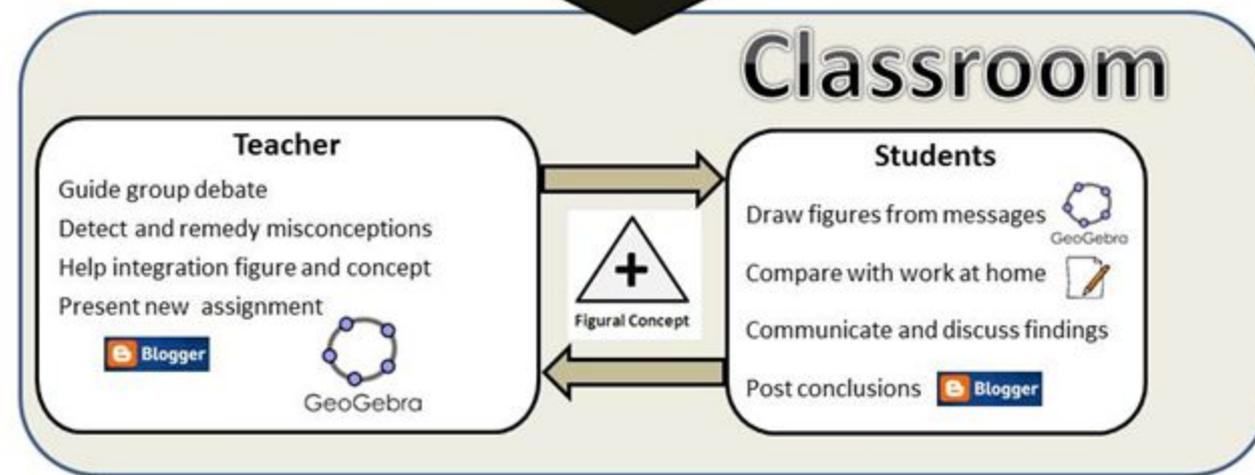
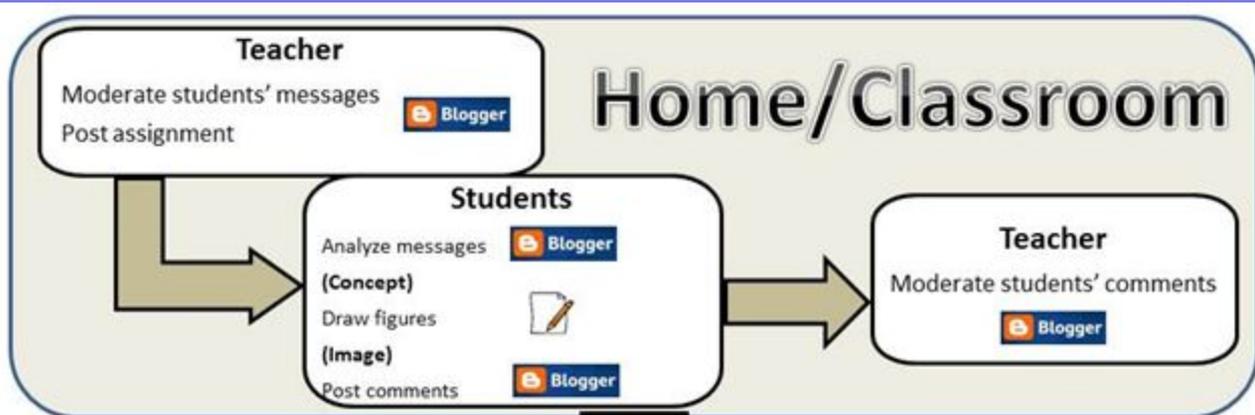
- Formada por 8 sesiones de 45 minutos cada una (en dos fases), en dos grupos de alumnos de 6º.
- Trabajo individual o por parejas en el aula informática.
- Trabajo manipulativo tradicional en grupos pequeños.
- Trabajo con todo el grupo alrededor de la pizarra digital.
- Applets elaborados con GeoGebra previamente.
- Construcciones hechas con GeoGebra por los alumnos.
- Comunicación continua a través del blog de clase.

INTERVENCIÓN COMPLETA: TIPOS DE TAREAS

- Trabajo con GeoGebra de dos formas:
 - Los alumnos manipularon applets de GeoGebra creados por otros profesores y publicados en la web. Motivación para alumnos y profesores.
 - Los alumnos construyeron sus propios archivos con GeoGebra. Flexibilidad y acción.
- **Ejemplos y contraejemplos** para ayudar a los alumnos a fusionar figura y concepto (más en **segunda fase**). Evitar prototipos.
- Presentaciones sobre ángulos y polígonos en el blog.
- Ejercicios para “entrenar” las técnicas y **tareas abiertas: conjeturar**.
- Pizarra digital: monitorizar más de cerca el trabajo individual de los alumnos (alumnos “sherpa”) y puestas en común con el gran grupo (profesor guía institucionalización).

INTERVENCIÓN COMPLETA: PAPEL DEL PROFESOR

- El profesor no es el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Propone la organización de cada sesión por fases: introducción gradual del modelo propuesto.
- Edita el blog. Modera comentarios de los alumnos.
- Guía el trabajo desde el ordenador con cañón o desde la pizarra digital (él o un alumno).
- Observa el trabajo de los alumnos en el aula.
- Los alumnos se ayudan entre sí.



GEOMETRÍA 2.0: RESULTADOS

Trabajo conjunto:

José María Sordo Juanena, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, UCM (jmsordo@ucm.es)

Jon Star, Harvard Graduate School of Education, EEUU (jon_star@harvard.edu)

IMPACTO EN EL PROFESOR: ORQUESTACIÓN

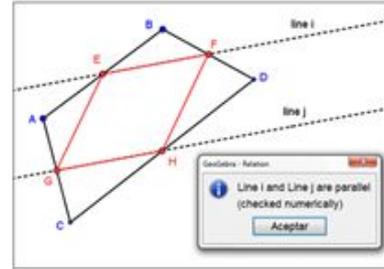
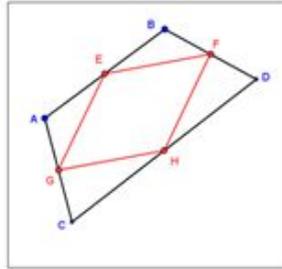
- Organización colectiva: comparaciones entre diferentes estrategias, el profesor recibe información continuamente.
- El entorno es viable: software de libre distribución y fácil manejo, y recursos hardware en centros.
- Baja complejidad del entorno: no grandes diferencias entre alumnos en los procesos de instrumentación.

IMPACTO EN EL PROFESOR: DISEÑO DE TAREAS

- El profesor tiene que invertir más tiempo y esfuerzo.
- Promover comunicación, cooperación: enfatizar conceptos figurales.
- El blog: el juego de los mensajes (F1) y tareas abiertas (F2).
 - A través de los comentarios.
 - Comprobación: con lápiz y papel o con GeoGebra.
 - Integración de GeoGebra y el Blog a través de esta actividad.
 - Alta participación (100% para triángulo y 87% para cuadrado): blog no obstáculo.
 - Dificultades: lenguaje natural, comunicación con rigor, condiciones necesarias y suficientes,...

IMPACTO EN EL PROFESOR: DISEÑO DE TAREAS

- GeoGebra:
 - Tareas de familiarización (inicial).
 - Tareas abiertas.



- Integración de GeoGebra y el Blog a través de estas actividades.
- Hacia el concepto figural: **invarianza** y **generalización**.
- El profesor: **idea de demostración** con GeoGebra.

IMPACTO EN EL APRENDIZAJE

- Errores iniciales de los alumnos. Prototipos. Desconexión figura-concepto. El profesor confirma.

Misconception	Detection	Frequency (% of 38 students)
<i>A triangle is always equilateral</i> ----- 'It is a geometric figure with three equal sides.'	Lesson 2, Taboo; Lesson 3, discussion	21%
<i>Triangles have always horizontal base</i> ----- 'Draw a horizontal segment and then like two diagonals.' 'Draw a horizontal line, then a vertical line and then like a diagonal.'	Lesson 2, Taboo; Lesson 3, discussion	32%
<i>Squares should have a horizontal base</i> ----- 'There are 4 lines: 2 horizontal and 2 vertical.' 'It is like a rhombus with horizontal sides.'	Lesson 2, Taboo; Lesson 3, discussion	40%
<i>Every parallelogram is a rhombus</i> ----- 'Draw a parallelogram, join its midpoints and see the rhombus.'	Lesson 4	12,50%

IMPACTO EN EL APRENDIZAJE

- Mejora la conexión entre figura y concepto en Geometría 2.0.
 - Ejemplo: Tarea exploración cuadriláteros (diapositiva 22).
 - Todos los asistentes (36) realizan la construcción con GeoGebra.
 - 24% correcto, 61% incompleto, 15% mal. Algunos imponen condiciones extra sobre el cuadrilátero de partida: por ejemplo ser paralelogramo (prototipo).
 - El 81% escribe un comentario en el Blog. No todos correctos.
 - El 60% de los alumnos detecta los errores en los mensajes en la puesta en común.

IMPACTO EN EL APRENDIZAJE

- Los alumnos expresan por primera vez en sus mensajes cuestiones sobre:
 - **Dinamismo:** arrastrar o mover la construcción y observar. Evitar prototipos.
 - **Invarianza:** al mover la construcción, el cuadrilátero interior siempre es un paralelogramo. Está relacionado con la generalización: parte conceptual en nuestro marco.
- Ejemplo: Tarea exploración puntos notables triángulo. Resultados similares.

IMPACTO EN LA MOTIVACIÓN

- El 100% de los alumnos expresa en el cuestionario inicial en el Blog que les han gustado mucho las primeras actividades con GeoGebra.
- Todos quieren que GeoGebra sea utilizado regularmente.
- Sus pequeños descubrimientos promovieron su confianza y emoción.
- Resultados inesperados: oportunidad para aprender.
- Altas tasas de participación en actividades propuestas (registradas en blog).
- Uso de GeoGebra, Blog y pizarra digital captó el interés y mantuvo su atención.
- El profesor mostró su asombro con las altas tasas de participación y atención.
- Los alumnos redujeron el uso del profesor: confiaron en sí mismos con GeoGebra y en sus compañeros para la validación. Transición difícil.

GEOMETRÍA 2.0: CONCLUSIONES

Trabajo conjunto:

José María Sordo Juanena, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, UCM (jmsordo@ucm.es)

Jon Star, Harvard Graduate School of Education, EEUU (jon_star@harvard.edu)

RESUMIENDO

- En los entornos de aprendizaje de matemáticas con tecnología integrada se pueden diseñar, implementar y llevar al aula tareas matemáticas “realista y juiciosamente”.
- Estas tareas promueven el aprendizaje más profundo a través de las representaciones y la comunicación, y además realzan la motivación.
- En estos entornos se facilita la comunicación y la interacción: especialmente importante para los alumnos más jóvenes.
- Los alumnos (profesores y familias) no están acostumbradas al trabajo colaborativo en matemáticas.

GRACIAS POR VUESTRA ATENCIÓN

VII Jornadas Enseñanza de las Matemáticas Cantabria
Nuria Joglar Prieto (URJC)

nuria.joglar@urjc.es



GEOMETRÍA CON ÉNFASIS EN LA COMUNICACIÓN

Trabajos interesantes:

Is a rectangle a square? Developing Mathematical Vocabulary and Conceptual Understanding, Chris Renne, **Teaching Children Mathematics**, 2004.

Designing Geometry 2.0 learning environments: a preliminary study with primary school students, Nuria Joglar Prieto, José María Sordo & Jon R. Star, **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 2013.