Ejercicio 1. La señorita Hoover tiene a 16 alumnos en su clase. Durante el recreo juegan tirando de los extremos de una cuerda hasta averiguar cuál es el más fuerte. Pueden jugar enfrentándose en grupos de cualquier cantidad de alumnos.

a) Describe la estrategia óptima para conseguir distinguir, entre todos, el tirador más fuerte.

b) ¿Cuántas veces tienen que jugar como mínimo?

c) Generaliza el apartado anterior para 2^n alumnos siendo *n* un número natural.

d) Volviendo a los 16 alumnos, ¿cuántas veces tendrán que jugar como mínimo para distinguir los dos tiradores más fuertes?

Solución:

a) En problemas similares lo más rápido es dividir a los elementos en dos grupos para compararlos, sin embargo en este problema con muchas fuerzas desiguales, es fácil convencerse de que sólo compararlos de uno en uno nos permite resolverlo.

Así pues en una primera ronda se compararán todos los alumnos dos a dos, en la siguiente ronda los vencedores de la anterior ronda dos a dos y así sucesivamente hasta llegar a un sólo vencedor.

b) 8 + 4 + 2 + 1 = 15 veces.

c) Duplicar el número de jugadores añade otra ronda más de comparaciones, así pasar de 16 jugadores a 32 hace que en la primera ronda haya 16 comparaciones para volver a tener 16 jugadores así que 16+8+...+2+1= 31 = 32-1. De la misma forma con 64 jugadores tendríamos 32+16+...+2+1= 63 = 64 – 1 y por analogía con 2^n jugadores se harían $2^{n-1}+2^{n-2}+....+2+1=2^n-1$ comparaciones.

d) La segunda persona más fuerte tiene que haber ganado todas las competiciones excepto la que le enfrentó al ganador. Así pues sólo es necesario comprobar cuál de las cuatro personas que se enfrentó al ganador es más fuerte. Necesitamos pues otras 3 comparaciones además de las 15 que usamos para distinguir al campeón luego 18 en total.

Ejercicio 2. Los Simpson deciden repartirse sus mascotas. Para ello hacen el dibujo que ves abajo en forma de escaleras, a continuación cada uno empezando en su nombre sigue el camino hacia abajo hasta encontrar un escalón (línea horizontal) que debe seguir a izquierda o derecha hasta llegar a otra vertical que seguirá bajando hasta llegar a otra escalón o a la mascota que le corresponde. En el dibujo puedes ver como, siguiendo esas reglas, a Bart le corresponde Ayudante SC.

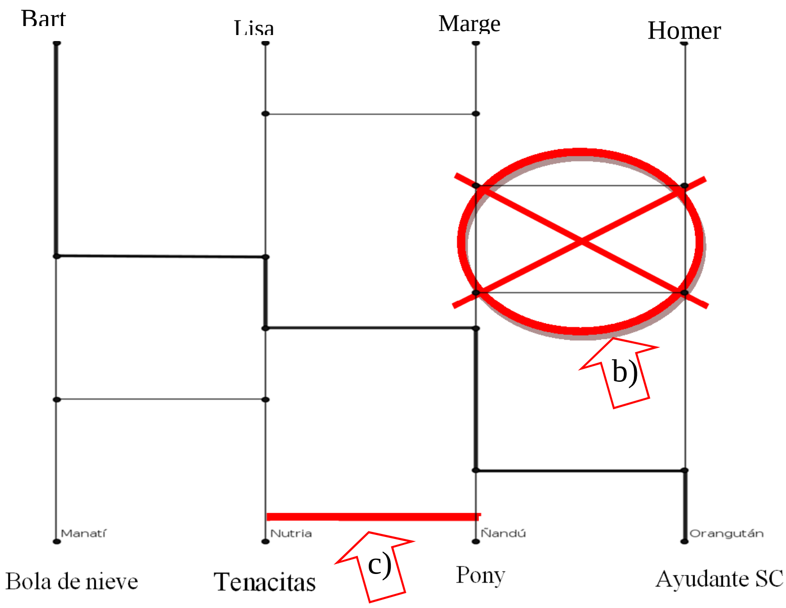
a) Di qué mascotas corresponden al resto de los Simpson.
b) Hay dos escalones que pueden suprimirse sin que cambie el reparto, ¿cuáles?
c) Homer se da cuenta de que la mascota que él quiere, le va a tocar a Marge. Sin que los demás se den cuenta añade un escalón, con lo cual su mascota y la de Marge quedan intercambiadas. ¿Dónde ha puesto la línea?

Solución:

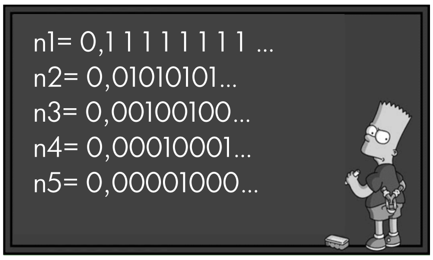
(a) Lisa: Bola de nieve. Marge: Tenacitas. Homer: Pony.

(b) Cualquier par de escalones paralelos en las mismas verticales sin ningún otro intermedio pueden suprimirse sin modificar el reparto pues son dos inversiones consecutivas. En nuestro caso los dos escalones superiores en las verticales de Marge y Homer.

(c) Homer añadirá un escalón entre las verticales de Lisa y Marge y justo por encima de Tenacitas y Pony para intercambiar estos regalos.



Ejercicio 3. ¡Han vuelto a castigar a Bart!. Fíjate en los números que está escribiendo en la pizarra:



a) Añade 2 cifras decimales más a cada uno.

b) Escribe los números n6, n7, n8, n9 y n10 con 10 decimales.

c) Llamamos M a la suma de todos los números: M= n1+n2+n3+…+n100+… ¿qué cifra estará en el décimo lugar decimal?, ¿y en el lugar 179?, ¿y en el 180?

d) ¿En qué lugares de M aparecen las cifras decimales **2 2 4** juntas y en este orden? (indicación: están entre los 100 primeros)

Soluciones :

de a) y de b) n1 = 0,1111111111
n2 = 0,0101010101
n3 = 0,0010010010
n4 = 0,0001000100
n5 = 0,0000100001
n6 = 0,0000010000
n7 = 0,0000001000
n8 = 0,0000000100
n9 = 0,0000000010
n10=0,0000000001

c) M = 0,1223242434

Observamos que cada cifra nos dice el número de divisores del número del lugar, salvo que el lugar siguiente tenga más de 10 divisores, que añadiría 1 a esa cifra. En el lugar 10 hay un 4 que corresponde a los 4 divisores de 10 y a que el 11 tiene menos de 10 divisores.

En el lugar 179, que es primo, debería haber un 2 , pero tendiendo en cuenta que el 180 tiene 18 divisores, la cifra del lugar 179 será un 3.

En el lugar 180 nos queda la cifra 8 puesto que del 181, que tiene menos de 10 divisores, no arrastramos ninguna cifra.

d) Llamemos $a_1 a_2 a_3$ a los lugares que ocupan las cifras 2 2 4 respectivamente.

a_2 es un número primo (si tuviese 12 divisores a_1 sería, al menos, 3).

a_1 no es número primo puesto que no hay dos primos consecutivos, por tanto debe tener 12 divisores (22 divisores es demasiado para números menores de 100)

a_3 debe ser el producto de dos primos distintos, o el cubo de un primo, que son los que tienen sólo 4 divisores. Buscando en la lista de primos para a_2 y comprobando, resulta que las únicas posibilidades para $a_1 a_2 a_3$ son 60,61,62 o 72,73,74.

Ejercicio 4. En Springfield se ha extendido la moda de usar capicúas, como el 22 o el 74247. El alcalde Quimby, ante la proximidad de las elecciones, quiere complacer a la población asignando un número capicúa a la matrícula de cada vehículo. Para ello tiene que averiguar:

a) ¿Cuántos capicúas hay de 1 cifra?

b) ¿Cuántos capicúas hay de 2 cifras?

c) ¿Cuántos capicúas hay de 3 cifras?

d) ¿Cuántos capicúas hay de 4 cifras?

e) ¿Si en total hay 10 000 vehículos en la ciudad ¿Cuál es el mayor capicúa que se utilizará?

Nota: No vamos a contar con los números capicúas que empiecen por cero.

solución:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 son los 9 capicúas de 1 cifra.

b) 11, 22, … 99 son los 9 capicúas de 2 cifras.

c) 101, 111, 121,…. 999 son los 90 capicúas de 3 cifras.

d) 1001, 1111, 1221, 1331,……9999 son los 90 capicúas de 4 cifras.

De hasta 4 cifras hay 9+9+90+90 = 198 capicúas.

De hasta 6 cifras hay 9+9+90+90+900+ 900 = 1998 capicúas.

De capicúas de 7 cifras hay 9000 capicúas más. Necesitaremos 8002 capicúas de 7 cifras para completar las 10 000 matriculas. Como el primer capicúa de 7 cifras es 1000001, el 8001º será 9000009 y el que buscamos será 9001009

Ejercicio 5. La taberna de Moe es un antro poco recomendable donde los clientes destruyen sus neuronas bebiendo cerveza Duff.

a) El mayor bebedor de cerveza es Barney que bebe un barril en 6 horas, mientras que Homer tarda 8 horas en beber ese mismo barril. A las 20 horas Moe empieza un barril para Homer y Barney. A las 22 horas Homer se va a casa y Barney sigue bebiendo. ¿A qué hora habrá acabado el barril para que Moe pueda cerrar la taberna?

b) Moe empieza otro barril de cerveza. Cuatro clientes como Carl y dos clientes como Lenny beberían el barril en dos horas. Dos clientes como Carl y 6 clientes como Lenny beberían el barril también en dos horas. ¿Cuánto tardarían en beber medio barril 8 clientes como Carl y 8 clientes como Lenny?

Solución:

a) Barney bebe 1/6 barril/h

Homer bebe 1/8 barril/h

Los dos beben juntos durante 2 horas,

así que consumen: (1/6 + 1/8)*2 = 7/12 barril

Por tanto, a Barney le queda por consumir 5/12 barril

y le llevará 5/12 / 1/6 = 5/2 hora

Así que consumir todo el barril llevaría 2 + 5/2 = 9/2 = 4 horas y media.

Es decir, que hasta las 00:30 horas no se acaba el barril y Moe no podría cerrar la taberna.

b) Cuatro clientes como Carl y dos clientes como Lenny beberían el barril en dos horas y, también, dos clientes como Carl y 6 clientes como Lenny beberían el barril en dos horas. Es decir, cada cliente como Carl (x) equivale a dos clientes como Lenny (y) (4x+2y=2x+6y)

Así, 8 clientes como Carl y 8 clientes como Lenny equivaldrían a 24 clientes como Lenny

Si 10 clientes como Lenny se beben el barril en 2 horas, podemos calcular cuánto tardarían 24 aplicando: 10*2=24*t. Es decir, t=5/6 hora = 50 minutos

Por tanto, en beber medio barril de cerveza tardarían 25 minutos.