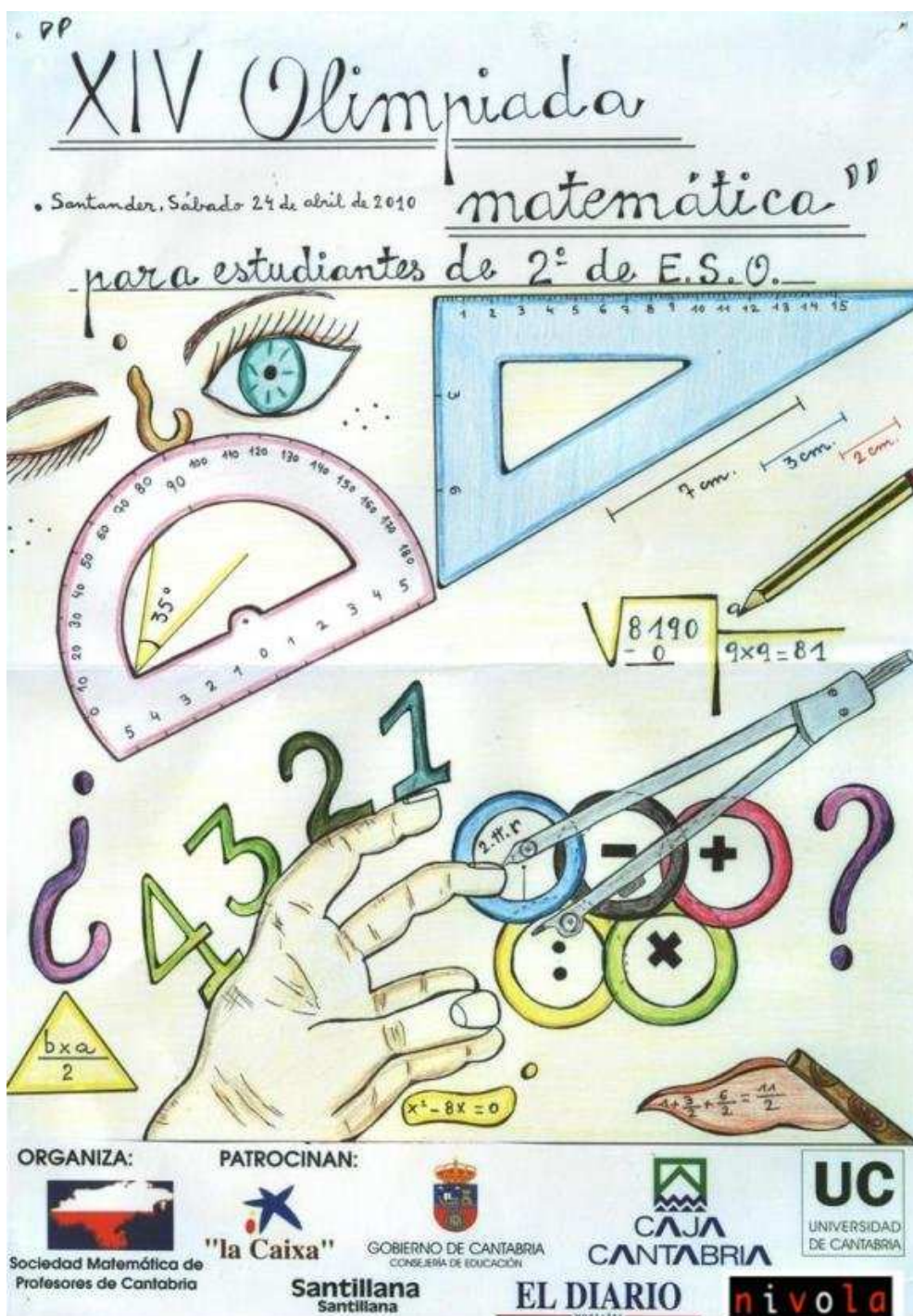


XIV OLIMPIADA MATEMÁTICA DE CANTABRIA

para estudiantes de 2º de E.S.O.

Santander, sábado 24 de abril de 2010

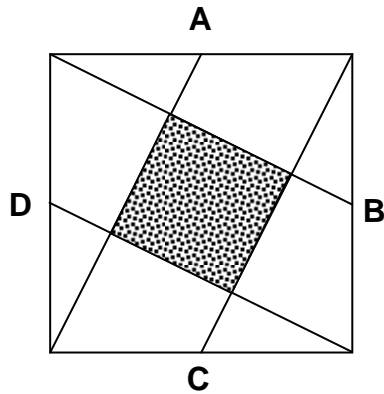


Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria (S.M.P.C.)

<http://platea.pntic.mec.es/anunezca/Sociedad/Soci.htm>

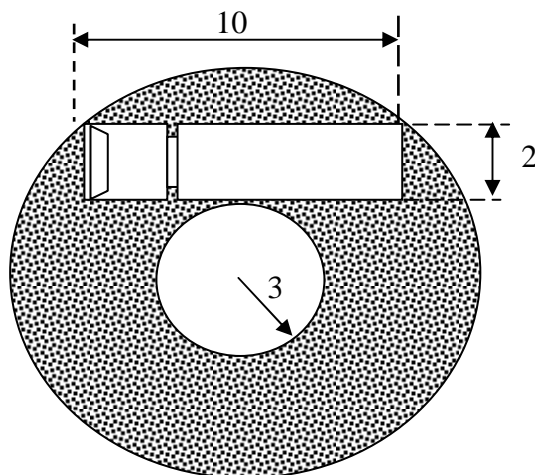
1.- GEOMETRÍA URBANA

- a) Las baldosas de cierta ciudad tienen 20 centímetros de lado. En su interior se muestra el siguiente dibujo:

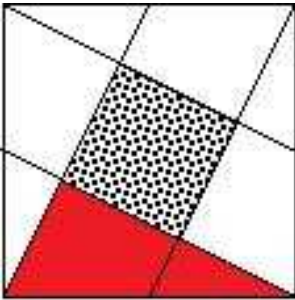


Los puntos **A**, **B**, **C** y **D** son los puntos medios de los lados. Debes hallar el área del cuadrado interior sombreado y su perímetro.

- b) Una de las rotondas de la ciudad tiene un círculo interior de 3 metros de radio. Los camioneros se quejan de que el círculo exterior es tan pequeño que solo pueden girar los camiones de menos de 10 metros (los que son más grandes se salen fuera de la rotonda). Supondremos que la anchura de cualquier camión es de 2 metros. Cuando quisieron asfaltar la acera nos preguntaron cuál era la superficie de la corona circular. No tuvimos necesidad de más datos. ¿Podrías calcularla tú?



- a) Vemos que en la baldosa podemos formar otros cuatro cuadrados iguales al del centro. Hemos marcado en rojo uno de ellos. Así pues, el área del cuadrado central que se pide es la quinta parte del área del cuadrado de lado 20 cm.



$$A_{\text{cuadrado lado}=20\text{ cm}} = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$$

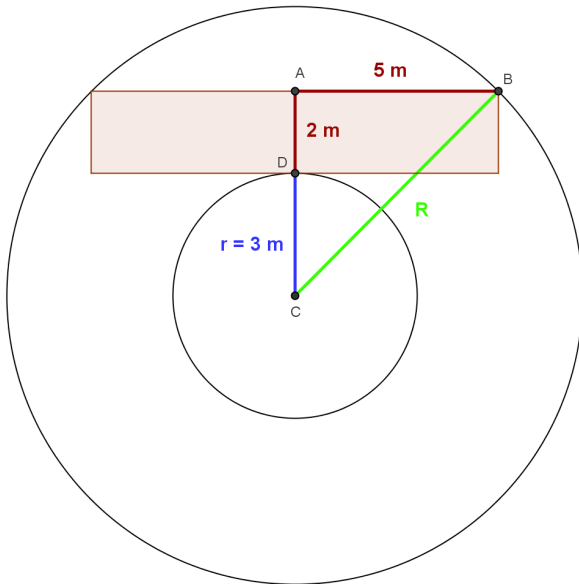
$$\text{Luego, } A_{\text{pedida}} = \frac{400}{5} = 80 \text{ cm}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{cuadrado}} = 80 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lado}^2 = 80 \Rightarrow$$

$$\text{lado} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$P_{\text{cuadrado}} = 4 \cdot \text{lado} = 4 \cdot \sqrt{80} = 16\sqrt{5} \approx 35'78 \text{ cm}$$

- b) Situamos los datos en la figura, teniendo en cuenta que AB es la mitad de la longitud del camión y AD su anchura, vemos que se forma un triángulo rectángulo BAC de catetos 5 m y 2+3=5 m y de hipotenusa R.

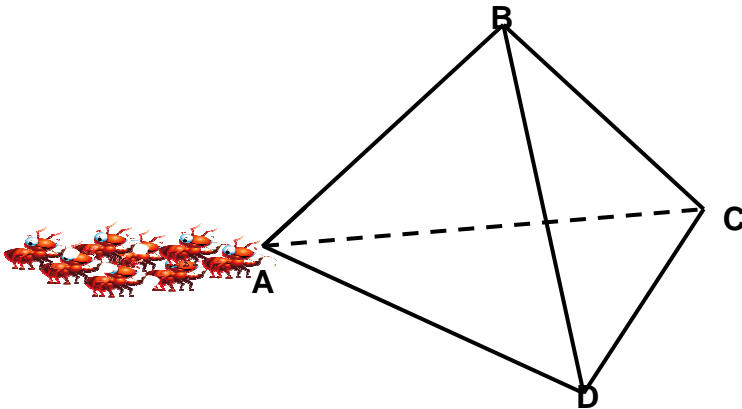


$$R = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7'07 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{corona}} &= A_R - A_r = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \\ &= 50\pi - 9\pi = 41\pi \approx 128'8 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

2.- HORMIGAS EN EL TETRAEDRO

Los movimientos brownianos son impredecibles movimientos de partículas. En el vértice **A** de un tetraedro tenemos 243 hormigas brownianas. Eligen una arista al azar y la recorren en 20 segundos. El porcentaje de hormigas que eligen cada vértice es del $33,3\%$.

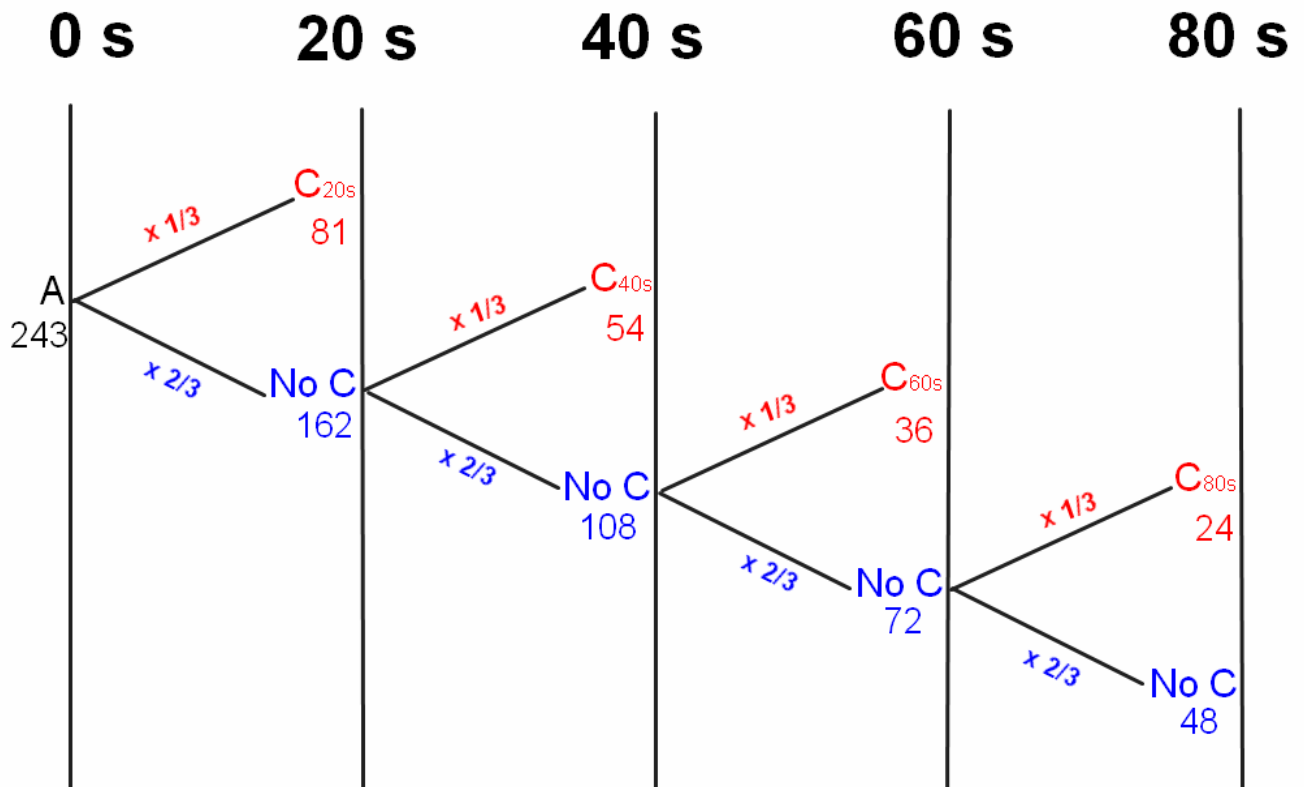


- ¿Cuántas de ellas llegarán al vértice **C** en 20 segundos?
- ¿Cuántas de ellas estarán o habrán pasado por el vértice **C** en 40 segundos?
- ¿Cuántas de ellas estarán o habrán pasado por el vértice **C** en 80 segundos?

SOLUCIÓN:

2.- HORMIGAS EN EL TETRAEDRO

$33\frac{1}{3}\% \equiv 0\hat{3} = \frac{1}{3}$. Usaremos el valor $\frac{1}{3}$ para no perder decimales.



a) Como se puede ver en el gráfico, en los primeros 20s llegan a **C** 81 hormigas.

b) 108 hormigas no han pasado por **C**, luego han pasado $243 - 108 = 135$.

Por tanto, la respuesta es **135 hormigas**.

c) 48 hormigas aún no han pasado por **C**, luego han pasado $243 - 48 = 195$.

Por tanto, la respuesta es **195 hormigas**.

3.- UN POCO DE INGENIO

Ahora te proponemos dos pruebas de vista e ingenio:

- a) En la primera, te pedimos que escribas en cada celda un dígito del 1 al 8, con las condiciones:
- que aparezcan los 8 dígitos,
 - que la diferencia entre dos dígitos vecinos (los que ocupan casillas consecutivas) sea siempre igual o mayor que 4,
 - que el resultado sea un número múltiplo de 45.

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

- b) En la segunda, debes encontrar a qué dígito corresponde cada letra de la siguiente expresión:

$$7AB + xy4 = zwc$$

entendiendo que cada letra mayúscula corresponde a un dígito par, cada letra minúscula corresponde a un dígito impar y que aparecen todos los dígitos del 1 al 9 sin repetirse.

SOLUCIÓN: 3.- UN POCO DE INGENIO

a) La respuesta es:

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| H | G | F | E | D | C | B | A |
| 4 | 8 | 3 | 7 | 2 | 6 | 1 | 5 |

A = 5 ya que el número buscado no contiene el 0 y es múltiplo de 45. Al ser **A = 5**, **B** sólo puede ser 1 y, por tanto, **C** puede ser 6, 7 u 8.

El 4 no puede tener vecinos a ambos lados, ya que sólo puede tener “de vecino al 8”. Por tanto, **H = 4** y **G = 8**.

Luego, nos quedan como posibles valores para C el 6 ó el 7.

- **Si C = 6:** Se deduce inmediatamente que **D = 2** y **E** sólo puede ser 7. Además, sólo nos queda el valor 3 para la casilla **F**.
- **Si C = 7:** Se deduce que **D = 6** y no se podrían completar las dos casillas que faltan ya que 3 y 6 serían vecinos y no se cumplirían las condiciones del enunciado.

b) La respuesta es:

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| A | B | C | x | y | z | w |
| 8 | 2 | 6 | 1 | 5 | 9 | 3 |

$$\left. \begin{array}{l} z \text{ puede ser } 9 \text{ u } 8 \\ z \text{ es impar} \end{array} \right\} \Rightarrow z = 9 \Rightarrow x = 1$$

$$B \text{ puede ser } \left\{ \begin{array}{l} 8 \Rightarrow C = 2 \text{ y nos llevamos } 1, \text{ que sumado con "A" e "y" nos daría par,} \\ \text{que no puede ser, porque deben sumar "w", que es impar} \\ 6 \Rightarrow C = 0 \text{ y no es posible porque eran cifras pares de } 1 \text{ a } 9 \\ 2 \end{array} \right.$$

Como **B = 2**, entonces **C = 6** y **A = 8**.

Sólo quedan dos posibilidades (**y = 3, w = 5**) o (**y = 5, w = 3**). Comprobamos que la única que verifica la igualdad es: **y = 5, w = 3**.

4.- ¿CUÁNTAS PÁGINAS?

La editorial **NIVOLA** se ha especializado en temas científicos. Nos han regalado el interesante libro “*Descartes. Geometría y método*”. Al leerlo, nos hemos fijado en que para numerar las páginas desde la primera a la última se han utilizado 372 dígitos (los dígitos o cifras son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9). ¿Puedes decir cuántas páginas tiene este libro?



SOLUCIÓN:

4.- ¿CUÁNTAS PÁGINAS?

| | Páginas | Total páginas | Total dígitos |
|--------------|--------------------|---------------|------------------------|
| Con 1 cifra | 1, 2, 3, ..., 9 | 9 | $9 \times 1 = 9$ |
| Con 2 cifras | 10, 11, ..., 99 | 90 | $90 \times 2 = 180$ |
| Con 3 cifras | 100, 101, ..., 999 | 900 | $900 \times 3 = 2.700$ |

Podemos darnos cuenta que el número de páginas del libro debe ser de tres dígitos, ya que con dos, tenemos $9 + 180 = 189$ dígitos y, si fuera de cuatro dígitos, nos harían falta más de $9 + 180 + 2.700 = 2.889$ dígitos.

Debemos utilizar 189 dígitos para las páginas de hasta dos cifras, por lo que nos quedan $372 - 189 = 183$ dígitos utilizados en números de tres cifras, de modo que deben ser $183:3 = 61$ páginas con números de tres cifras. La primera página con tres cifras es la página 100, y nos quedan otras 60 páginas después, por lo que en total son 160 páginas.

Así pues, la solución es **160 páginas**.

5.- AUGUSTUS DE MORGAN

a)



Me llamo Augustus De Morgan. Soy inglés, nacido en la India en el siglo XIX.

He dedicado mi vida a la lógica y al álgebra.

Es fácil encontrar en el álgebra muchas relaciones sorprendentes. Te diré una, a modo de adivinanza:

El año que cumplí x años era el año x^2 . ¿Puedes decirme el año en que nací?

b) Augustus De Morgan fue el primer presidente de la Sociedad de Matemáticas de Londres. Como tal, recibió consultas sobre problemas de todo tipo; uno de ellos podría haber sido el siguiente:

Fíjate en la siguiente igualdad, que es claramente errónea.

*Moviendo un solo palillo conviértela en una **igualdad verdadera**.*

SOLUCIÓN: 5.- AUGUSTUS DE MORGAN

a) Sabemos que el año de nacimiento está comprendido entre 1801 y 1900, ya que nació en el siglo XIX.

Buscamos qué números cuadrados perfectos hay entre esas dos fechas y sólo encontramos que lo verifica el número 43, pues:

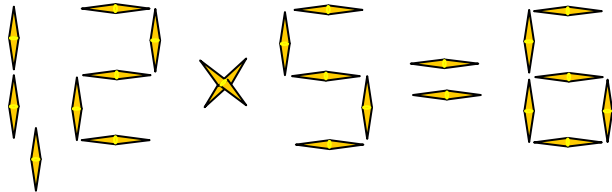
$$\begin{aligned} 42^2 &= 1764 \\ 43^2 &= 1849 \\ 44^2 &= 1936 \\ 45^2 &= 2025 \end{aligned}$$

Luego, las posibilidades son:

- En 1849 cumplió 43 años:
Como $1849 - 43 = 1806$, el año de nacimiento fue **1806**.
- En 1936 cumplió 44 años (nació en el siglo XIX, pero pudo vivir en parte del siglo XX):
Como $1936 - 44 = 1892$, el año de nacimiento fue **1892**.

Aunque ambas soluciones cumplen las condiciones del enunciado, el verdadero año de nacimiento de Augustus de Morgan fue 1806.

b)



**La Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
(SMPC)**

agradece tu participación en la Olimpiada.

Y recuerda que...



“Lo importante es no dejar de hacerse preguntas”

Albert Einstein