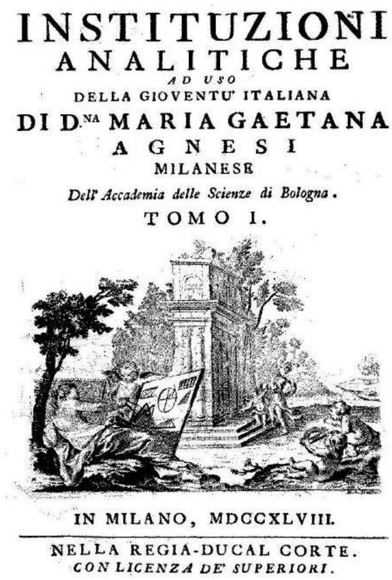
Olimpiada Matemática para estudiantes de 2º de ESO

María Gaetana Agnesi fue una importante matemática del siglo XVIII. En un tiempo en el que las mujeres tenían casi vetado el acceso al mundo académico, ella logró destacar a la altura de otros importantes matemáticos de su época como Euler o Leibniz.

Fue una niña prodigio, destacando muy pronto en el conocimiento de los idiomas extranjeros (hasta seis o más idiomas, además de su italiano materno).



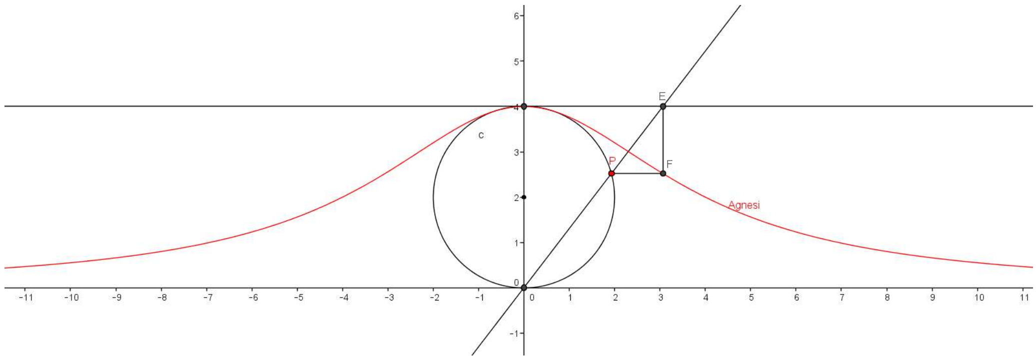
INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.

IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Su obra más importante es *Instituzioni Analitiche* en la que reúne y homogeniza todo el conocimiento sobre el cálculo infinitesimal recién descubierto por Newton y Leibniz.

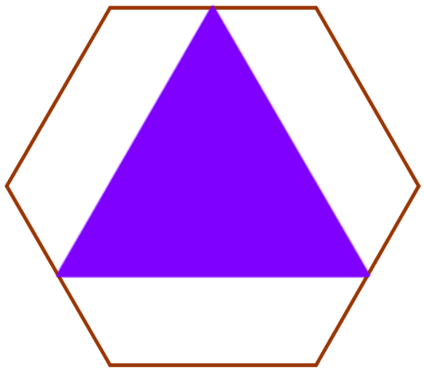
El próximo 16 de mayo se cumplirán 300 años de su nacimiento y por ello hemos querido fijarnos en esta importante figura de las Matemáticas para ilustrar esta prueba.

Uno de los aspectos que han hecho más popular a Agnesi es la Geometría, gracias a una curva que ella popularizó y que se conoce como la curva de Agnesi. También se la conoce como la "bruja de Agnesi" debido a una errónea traducción del italiano al inglés. Empezamos, entonces, con un problema de geometría:



Ejercicio 1

Se da un hexágono regular 4 cm. de lado. Se unen los puntos medios de sus lados alternativamente tal como se indica en la figura:



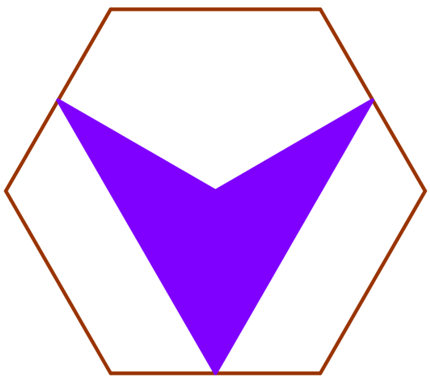
a) ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

b) ¿Qué proporción del área del hexágono es el área del triángulo?

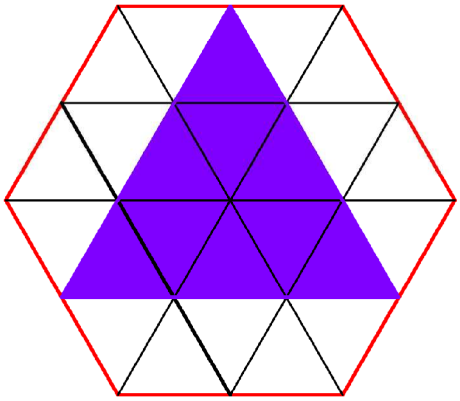
Ahora unimos los puntos medios de los lados y el centro del hexágono como en la figura siguiente:

c) ¿Cuál es el perímetro de esta otra figura?

d) ¿Qué proporción del área del hexágono es el área de la figura?



Solución



Dividamos el hexágono en 24 triángulos equiláteros

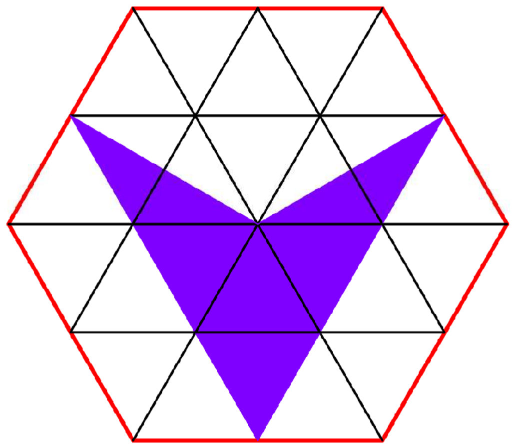
a) El lado de cada uno de estos triángulos equiláteros es la mitad del lado del hexágono, es decir, 2 cm.

El triángulo completo tiene entonces un perímetro de 9.2 = 18 cm.

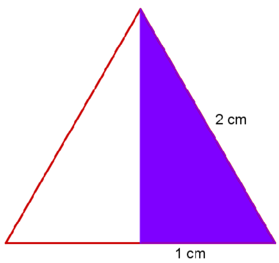
b) El área del triángulo completo está formada por 9 de esos triángulos equiláteros y cada uno de ellos es la 24ª parte del hexágono.

El área del triángulo es $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$ dela del hexágono.

Repetimos lo mismo en la otra figura:



c) Usando, como antes, los triángulos equiláteros como unidad, el perímetro de esta otra figura está formado por 6 lados y cuatro veces la altura de uno de esos triángulos.



Utilizando el teorema de Pitágoras, vemos que la altura de cada uno de estos triángulos es $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\text{cm}$

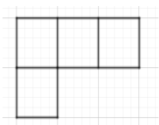
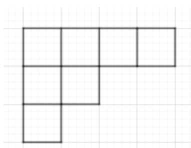
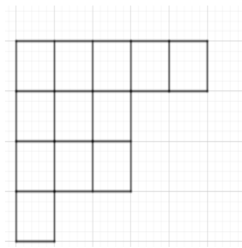
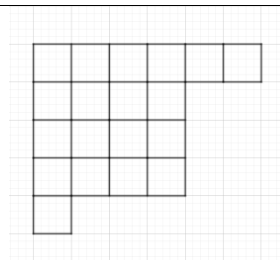
Por lo tanto, el perímetro completo es $6.2+4\sqrt{3}=12+4\sqrt{3}\simeq 18'928\text{ cm}$

d) El área de esta figura está formada por 4 triángulos y otros 4 medios triángulos, es decir, 6 en total. Razonando como en el apartado **b)**, el área de la figura es $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ de la del hexágono.

En 1750 el papa Benedicto XIV, gran promotor de las ciencias y de la Matemática en particular, le otorga a Agnesi la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Bolonia. Hecho insólito en una época en la que a las mujeres ni siquiera se les permitía acudir como estudiantes. Sin embargo, el padre de Agnesi enferma gravemente y ella acepta la cátedra sólo de manera honorífica y nunca llega a hacerse cargo. En 1752, el padre de Agnesi muere y aunque no queda constancia del origen de su enfermedad, esta situación nos ha inspirado el siguiente problema:

Ejercicio 2

La bacteria de nombre MathematicusOlympicus tiene una forma extraña y cada mes crece según un patrón, pasando de ocupar 4 células el primer mes a tener 7 el segundo, 12 el tercero, 19 el cuarto, … A continuación, se muestra la forma de dicha bacteria en los cuatro primeros meses:

Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
			

- **a)** Dibuja el patrón que tendrá la bacteria el quinto y el sexto mes. ¿Cuántas células ocupa en cada caso?
- **b)** ¿En qué mes la bacteria empieza a ocupar más de doscientas células?
- **c)** Intenta dar una expresión general para el número de células que ocupa la bacteria en el mes *n*.
- **d)** ¿En qué mes la bacteria ocupará exactamente 2028 células?

Solución

Cada mes, la bacteria está formada por un cuadrado de tantas células de lado como indica el número del mes, más otra abajo a la izquierda y otras dos arriba a la derecha: en total, $n^2 + 3$ células en el mes n.

$n^2+3>200 \Rightarrow n^2>197 \Rightarrow n>\sqrt{197}\simeq 14'035$. A partir del mes 15, habrá más de 200 células.

La biblioteca Ambrosiana en Milán contiene todas las obras inéditas de Maria Gaetana Agnesi, que ocupan un total de 12 volúmenes.

Ejercicio 3

Una noche, el vigilante de la biblioteca, que está aburrido, decide enredar con los interruptores de las luces de las diez salas que contienen las obras del siglo XVIII y que están numerados del 1 al 10. Primero enciende las luces de las diez salas. A continuación, pulsa los interruptores correspondientes a las salas de número par; luego, pulsa los de las salas de número múltiplo de 3; después los de los múltiplos de 4, luego los de los múltiplos de 5 y así sucesivamente hasta los múltiplos de 10.

a) ¿Cuántas veces (incluida la del encendido inicial) se pulsan los interruptores 3, 4, 8 y 9? ¿Cuáles de estas cuatro salas quedan encendidas?

b) ¿Qué salas quedarán encendidas al final?

Como le sabe a poco esta experiencia, luego la repite con los interruptores de las 100 salas de la biblioteca: enciende todas las salas y pulsa los interruptores de las salas múltiplos de 2, luego las de los múltiplos de 3 y así sucesivamente hasta las de los múltiplos de 100.

c) ¿Cuántas veces (incluida la del encendido inicial) se pulsan los interruptores 12, 25, 31, 72 y 81? ¿Cuáles de estas salas quedan encendidas?

d) ¿Qué salas quedan encendidas al final?

Solución

a)El interruptor 3 se pulsa la vez inicial y con los múltiplos de 3: dos veces, así que queda apagada la luz (primero se enciende y luego se apaga).

El interruptor 4 se pulsa la vez inicial, con los múltiplos de 2 y con los múltiplos de 4: tres veces, así que la luz queda encendida (se enciende, se apaga y se enciende).

El interruptor 8 se pulsa la vez inicial (con los múltiplos de 1), con los múltiplos de 2, con los de 4 y con los de 8: cuatro veces, así que la luz quedará apagada.

El interruptor 9 se pulsa con sus divisores: la vez 1, la 3 y la 9. Tres veces así que queda encendido.

b) Podemos hacer lo mismo con los restantes números:

Queda encendido el 1 que sólo se pulsa la primera vez. El resto quedan apagados:

El 2 se pulsa dos veces: 1 y 2

El 5 se pulsa dos veces: 1 y 5

El 6 se pulsa cuatro veces: 1, 2, 3 y 6

El 7 se pulsa dos veces: 1 y 7

El 10 se pulsa cuatro veces: 1, 2, 5 y 10

c)El 12 se pulsa con los múltiplos de 1, 2, 3, 4, 6 y 12: seis veces y queda apagado.

El 25 se pulsa con los múltiplos de 1, 5 y 25: tres veces y queda encendida

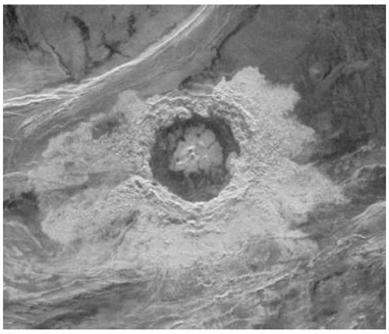
El 31 se pulsa con los múltiplos de 1 y 31: dos veces y queda apagado

El 72 se pulsa con los múltiplos de 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 y 72: doce veces y queda apagado

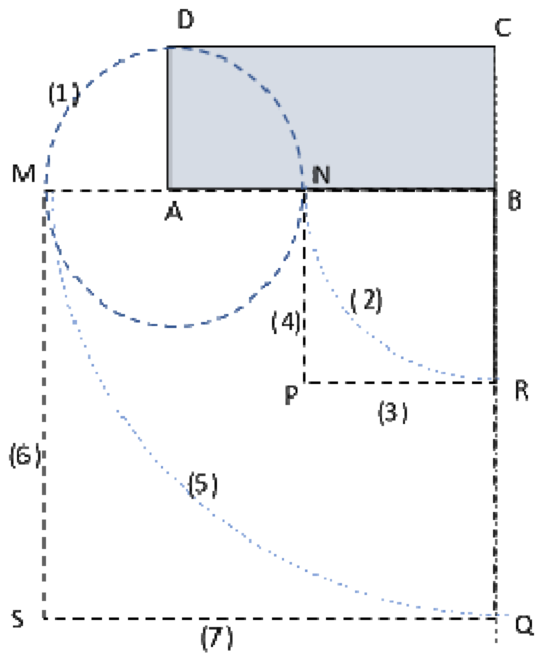
El 81 se pulsa con los múltiplos de 1, 3, 9, 27 y 81: cinco veces y queda encendido.

d) Cada interruptor se pulsa tantas veces como divisores tiene el número asignado.

Cada vez que encontramos un factor a del número n, encontramos automáticamente otro factor $\frac{n}{a}$, salvo que el número $n=a.a$ sea un cuadrado perfecto, en cuyo caso sólo encontramos un factor en lugar de una pareja. Así que las luces quedan encendidas si el interruptor se pulsa un número impar de veces, esto es, si el número asignado tiene una cantidad impar de divisores y ésto sólo ocurre con los cuadrados perfectos: quedan encendidas las luces 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100



Como reconocimiento a la importancia de su papel en la historia de la Matemática, el nombre de Maria Gaetana Agnesi se utilizó para bautizar uno de los cráteres del planeta Venus.



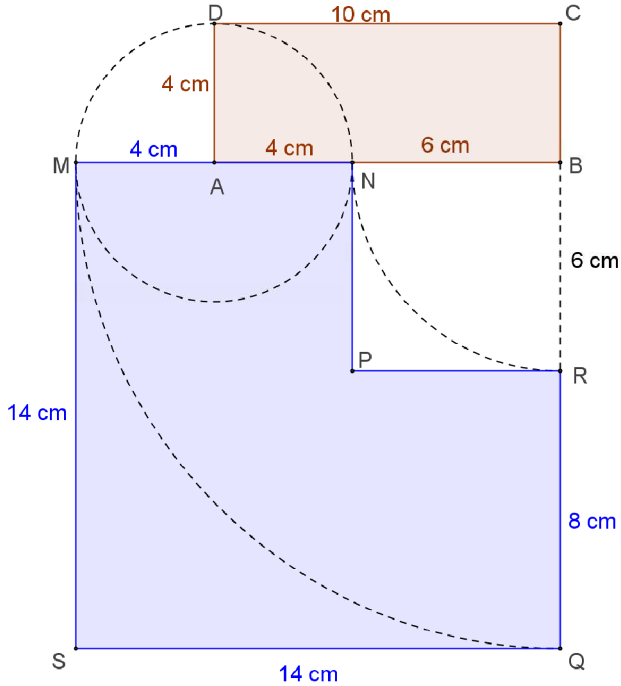
Ejercicio 4

Fíjate en el dibujo. Hemos comenzado con el rectángulo ABCD y hemos ido trazando la circunferencia (1) con centro en A; después el arco (2) con centro en B; los segmentos (3) y (4); el arco (5) y los segmentos (6) y (7). Así hemos construido el polígono MNPRQSM.

- **a)** Si el lado AB mide 10 cm y el lado ADmide 4 cm. ¿Cuánto mide el área del polígono MNPRQSM?
- **b)** Supongamos ahora el área de ABCD es de 60 cm^2, ¿Cuánto mide el área del polígono MNPRQSM?
- **c)** Si AD mide *x* cm. y AB mide *y* cm. encuentra una fórmula, en función de *x* e *y* para el áreadel polígono MNPRQSM.

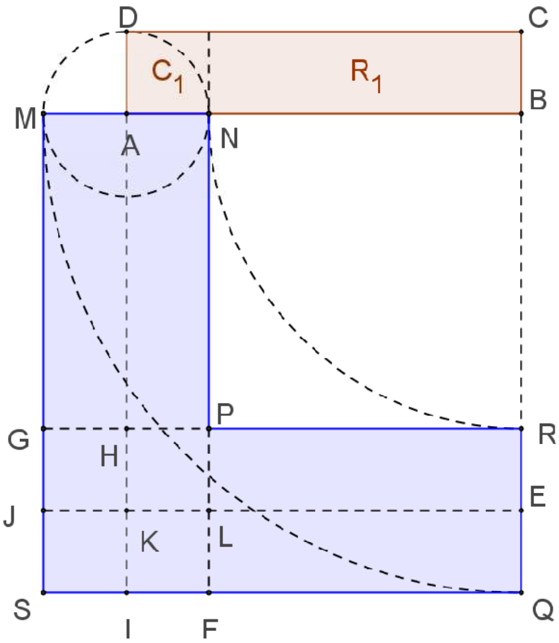
Solución

a) Como AN mide lo mismo que AD tenemos que NB mide 6 cm y BR medirá lo mismo. Dado que BQ mide lo mismo que BM, resulta que RQ mide 8 cm y que MS mide 14 (como SQ)



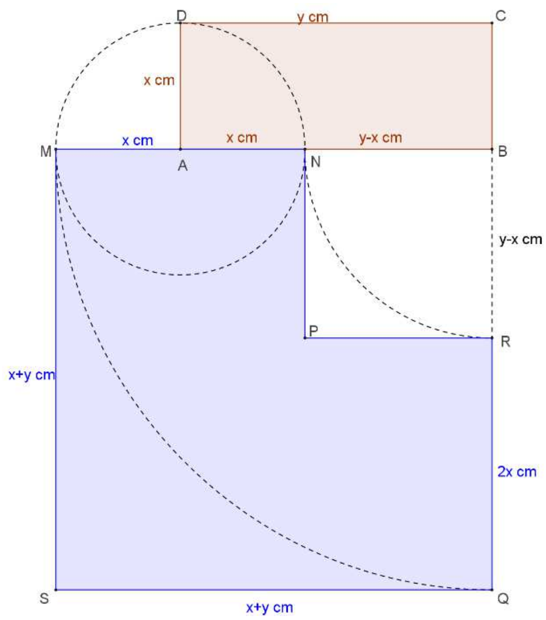
El área de MNPRQS podemos calcularla como la del cuadrado MBQS menos la del cuadrado NBRP: $14^2 - 6^2 = 160\ \text{cm}^2$

También podemos calcularla como la del rectángulo de vértices MNP, el de vértices PRQ y el cuadrado restante: $8.6 + 6.8 + 8^2 = 160\ \text{cm}^2$



b) Si dividimos el rectángulo original en un cuadrado C_1 a la izquierda y un rectángulo R_1 a la derecha, observamos que la figura MNPRQS está formada por 4 cuadrados como C_1 y cuatro rectángulos como R_1 así que su área es cuatro veces la del rectángulo ABCD.
Si ABCD tiene un área de 60 cm^2, entonces MNPRQS tiene un área de 240 cm^2

c) Este razonamiento nos lleva también a que si los lados de ABCD miden x e y cm, entonces su área es de $x.y$ cm^2y el área de MNPRQS es de $4xy$ cm^2



También podríamos haber razonado como en el apartado **a)** y ver que el área de MNPRQS es $(y+x)^2 - (y-x)^2 = 2y.2x = 4xy$ cm^2 (o bien los dos rectángulos y el cuadrado $2x(y-x) + (y-x).2x +$
$+(2x)^2 = 2xy - 2x^2 + 2xy - 2x^2 + 4x^2 = 4xy$

Una vez encontrada la fórmula general, podemos resolver el apartado **b)**

Ejercicio 5

Para acabar nuestro homenaje, diremos que un número de tres cifras $a_1a_2a_3$es un número de Agnesi si satisface la propiedad de que la cantidad $(a_1+1) \cdot(a_2+1) \cdot(a_3+1)$ es múltiplo de 105. Por ejemplo, el número 596 es de Agnesi, ya que (5+1).(9+1).(6+1) = 6.10.7 = 420 es múltiplo de 105. Sin embargo, el número 732 no es de Agnesi porque 8.4.3 = 96 no es múltiplo de 105.

a) Escribe otros 6 números de Agnesi
b) ¿Cuántos números Agnesi existen?
c) ¿Cuál es el número de Agnesi más pequeño? ¿Y el más grande?
d) ¿Existe algún número de Agnesi múltiplo de 11?

Solución

a) Ya que la propiedad "*ser de Agnesi*" depende de las cifras del número pero no de su posición, al ser 596 un número de Agnesi, también lo son 569, 956, 965, 659 y 695. Como nos piden otro número más y ya hemos agotado las seis posibilidades de ordenar el 5, el 6 y el 9, necesitamos encontrar otros tres números cuyo producto sea múltiplo de 105. Pero resulta que 105 = 3.5.7 así que cualquier número formado con las cifras 2, 4 y 6 será un número de Agnesi. Por ejemplo 246 ó 462

b) Ya hemos establecido que buscamos tríos de números cuyo producto sea 105 ó 2.105 ó 3.105, etc

105 = 3.5.7 Números formados con las cifras **2, 4 y 6**

2.105 = 2.3.5.7 = 6.5.7 Números formados con las cifras **5, 4 y 6**

2.105 = 2.3.5.7 = 3.10.7 Números formados con las cifras **2, 9 y 6**

2.105 = 2.3.5.7 = 3.5.14 Imposible porque 14 es mayor de 10

3.105 = 3.3.5.7 = 9.5.7 Números formados con las cifras **8, 4 y 6**

(3.5 y 3.7 son mayores de 10)

4.105 = 2.2.3.5.7 = 6.10.7 Números formados con las cifras **5, 9 y 6**

(4.3, 4.5, 4.7 y 2.7 son mayores que 10. También lo son 5.3, 5.5 y 5.7)

6.105 = 2.3.3.5.7 = 9.10.7 Números formados con las cifras **8, 9 y 6**

El resto de los múltiplos de 105 producen factores mayores de 10

Hay seis tríos de cifras que producen números de Agnesi y con cada trío de números se puede ordenar de seis maneras diferentes, con lo que hay 36 números de Agnesi

c) De las 36 posibilidades, el número más pequeño es el 246 y el mayor el 986

d) Si uno no conoce el criterio de divisibilidad entre 11, puede investigarlo para los números de tres cifras: un múltiplo de 11 de tres cifras será de la forma 11.*ab* donde *ab* es un número de dos cifras (*a* decenas y *b* unidades).

Si a + b < 10

	a	b
x	1	1
	a	b
a	b	
a	a + b	b

Si a + b >= 10 (nos llevamos 1)

	a	b
x	1	1
	a	b
a	b	
a + 1	a + b - 10	b

Un número de tres cifras es múltiplo de 11, si la cifra central (la de las decenas) coincide con la suma de las cifras extremas (unidades u centenas) o si la cifra central más 11 coincide con la suma de las cifras extremas.

Los tríos de cifras que producen números de Agnesi tales que el mayor de ellos coincide con la suma de los otros dos son 2, 4 y 6 así que 462 y 264 son números de Agnesi múltiplos de 11

Los tríos de cifras que producen números de Agnesi tales que el menor de ellos más 11 coincide con la suma de los otros dos son 8, 9 y 6 de manera que 869 y 968 también son números de Agnesi múltiplos de 11