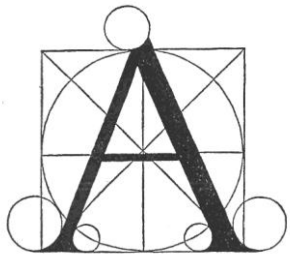


Respuesta Ejercicio A

a) ¿Cómo ha podido Escipión del Ferro averiguar el mes del cumpleaños?

b) ¿Cómo ha podido Luca Pacioli averiguar el día del cumpleaños?

c) ¿Cuál es la fecha del cumpleaños de Piero della Francesca?

Escipión del Ferro razona de la manera siguiente:

Luca sabe que a mí me han dicho el día 14, 15, 16, 17, 18 ó 19. Si Luca cree que yo no puedo saber la fecha completa, es porque está seguro de que no me han dicho ni el 18 ni el 19, ya que si me hubiesen dicho el 18, yo sí sabría que el cumpleaños es el 18 de junio (no hay más fechas con 18) y si me hubiesen dicho el 19, yo sabría que es el 19 de mayo. Y si Luca ***está seguro*** *de que no me han dicho ni el 18 ni el 19, es porque a él no le han dicho ni el mes de mayo ni el mes de junio.*

Al deducir Escipión que el mes que han dicho a Luca es julio o agosto, junto con la información del día que a él le han dicho, puede concluir la fecha completa.

Luca Pacioli razona de la siguiente manera:

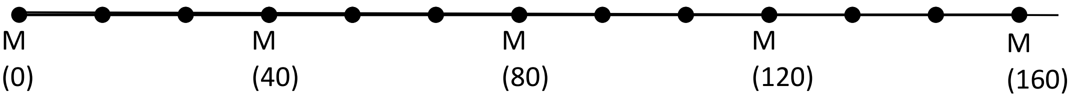
Al decir yo que creía que Escipión no podía saber la fecha completa, él ha podido deducir que el mes que mí me han dicho es el de julio o el de agosto. Si con esta información y con el día que le habían dicho, ya sabe la fecha completa, es porque a él no le han dicho el día 14, ya que de lo contrario, seguiría sin saber si es el 14 de julio o el 14 de agosto.

Al descartar el día 14, Luca Pacioli (que le habían dicho el mes), puede deducir la fecha completa.

Un observador externo, puede concluir que si, con sólo descartar el día 14, Luca ya puede saber la fecha, es porque a Luca no le dijeron el mes de agosto, porque si no, seguiría sin saber si es el 15 de agosto o el 17 de agosto. Por lo tanto el cumpleaños de Piero della Francesca es en julio y como no es el 14, tiene que ser el 16 de julio.

Respuesta Ejercicio B

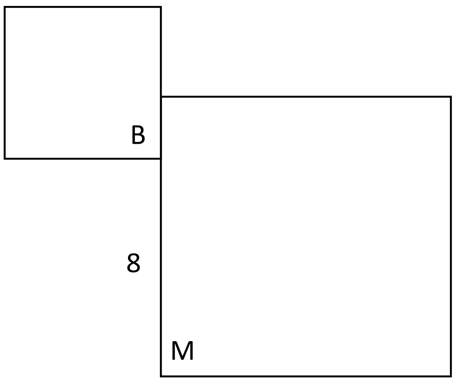
Podemos pensar que el cuadrado pequeño rueda sobre una línea que representa el cuadrado grande así



a) ¿Cuál es el primer vértice (A, B, C o D) que vuelve a tocar a M?
Al desplazarse el cuadrado pequeño, los vértices BCDA marcan las posiciones 0, 6, 12, 24, … que como se ve, son los múltiplos de 6. Ni la posición M(40) ni la M(80) coinciden con ningún vértice del cuadrado pequeño, puesto que no son múltiplos de 6; sin embargo la posición M(120) es alcanzada por el vértice B después de 5 vueltas.

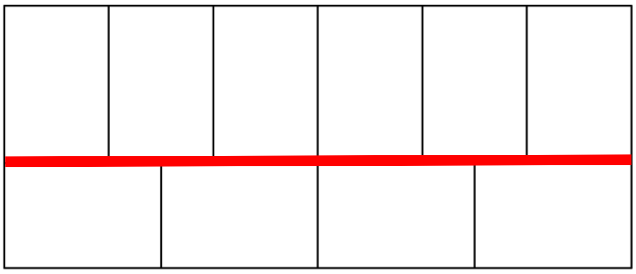
b) Cuando la pieza ABCD haya dado 2017 vueltas sobre sí misma, ¿cuántas veces se habrán tocado los vértices B y M?
El cuadrado pequeño vuelve a la posición inicial cada 5 vueltas. Por lo tanto coincide con M en 2015/5 =403 veces.

c) ¿A qué distancia quedan los vértices B y M después de esas 2017 vueltas?
Tras la vuelta 2015 el cuadrado pequeño estará en la posición inicial. Dos vueltas después el cuadrado pequeño estará en la posición:



Es decir, a 8 cm de M.

Respuesta Ejercicio C

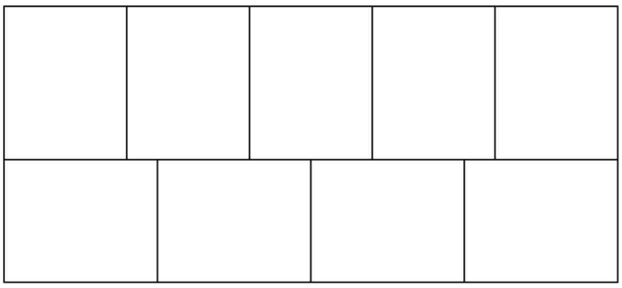


a) ¿Qué superficie tiene el rectángulo grande?

Al fijarnos en la línea horizontal que divide el rectángulo grande, se ve que en cada rectángulo pequeño, 6 lados cortos miden lo mismo que 4 largos, es decir que la proporción del rectángulo es $\frac{4}{6}$ o lo que es lo mismo, $\frac{2}{3}$

Un rectángulo que midiese 2cm x 3cm (y por tanto, semejante al que buscamos), tendría de perímetro 2+3+2+3=10cm. Como el rectángulo del enunciado tiene de perímetro 50 cm, esto es, 5 veces más grande que el de 2cm x 3cm, podemos concluir que el rectángulo buscado tiene lados $2.5=10\,\text{cm}$ y $3.5=15\,\text{cm}$.

Efectivamente, el rectángulo de dimensiones 10 cm x 15 cm tiene proporción $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ y su perímetro es 10+15+10+15=50 cm.



b) ¿Qué perímetro tiene cada uno de los rectángulos pequeños?

Como antes, vemos que los rectángulos pequeños tienen proporción $\frac{4}{5}$

Al ser el rectángulo grande de 720 cm^2 de superficie, cada uno de los pequeños medirá $\frac{720}{9}=80$ cm^2

Un rectángulo de dimensiones 4 cm x 5 cm tiene 20 cm^2 de superficie y el que nosotros buscamos tiene que tener 80 cm^2, es decir, 4 veces más. Como la superficie aumenta de manera cuadrática y $4 = 2^2$, concluimos que el rectángulo buscado mide el doble de 4 cm x 5 cm.

Efectivamente, el rectángulo de dimensiones 8 cm x 10 cm tiene 80 cm^2 de superficie y tiene proporción $\frac{4}{5}$.

Así que el perímetro del rectángulo buscado es 8 + 10 + 8 + 10 = 36 cm.

2ª opción

Si preferimos un enfoque algebraico el lugar de uno geométrico, podemos llamar x al lado más corto e y al más largo de cada uno de los rectángulos pequeños.

En el apartado *a)*, tendríamos que $\begin{cases} 6x & = 4y \\ 2x+2y & = 50 \end{cases}$ y obtenemos $\begin{cases} x & = 10 \\ y & = 15 \end{cases}$

El rectángulo grande tendrá como superficie 10 veces la de cada uno de los pequeños, esto es 10.10.15=1500 cm^2, o bien nos fijamos en que el rectángulo grande tiene dimensiones (6.10) x (10+15), es decir, 60 x 25, lo que arroja una superficie de 1500cm^2

En el apartado *b)* tendríamos que $\begin{cases} 5x & = 4y \\ 5x.(x+y) & = 720 \end{cases}$ (para la segunda ecuación, también podríamos haber considerado que el área de un rectángulo pequeño es la novena parte de la del grande: $x.y$ = $\frac{720}{9} = 80$) y obtenemos $\begin{cases} x & = 8 \\ y & = 10 \end{cases}$ y por tanto el perímetros sería 36 cm.

Respuesta Ejercicio D

a) ¿Cuántos arqueros tenía cada grupo?

Supongamos que en cada grupo hay *n* arqueros

$$media_A = 3 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \Rightarrow 3n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \qquad (*1)$$

$$media_B = 8 = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \Rightarrow 8n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \qquad (*2)$$

Supongamos que el peor del grupo B es y_1 y pasa al grupo A. Ahora el grupo A tiene un arquero más que antes y el grupo B, un arquero menos. Entonces queda:

$$3'5 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1}{n+1} \Rightarrow 3'5 \cdot (n+1) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3'5n + 3'5 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 \qquad (*3)$$

$$8'5 = \frac{y_2 + \ldots + y_n}{n-1} \Rightarrow 8'5 \cdot (n-1) = y_2 + \ldots + y_n \Rightarrow 8'5n - 8'5 = y_2 + \ldots + y_n \qquad (*4)$$

Restando (*2) – (*4) queda: $y_1 = 8n - (8'5n - 8'5)$, es decir $y_1 = 8,5 - 0,5n$

Restando (*3) – (*1) queda $y_1 = 3,5 + 0,5n$

De estas dos últimas igualdades obtenemos que $8,5 - 0,5n = 3'5 + 0'5n \Rightarrow 5 = n$

b) ¿Qué puntuación tenía el arquero que ha cambiado de grupo?

Ahora que ya sabemos que $5 = n$ entonces tenemos que $y_1 = 8'5 - 0'5 \cdot 5 = 6$

c) ¿Qué puntuación tenían los restantes arqueros del grupo B si sabemos que no había puntuaciones repetidas?

Para que 5 números enteros, no mayores que 10 y no repetidos tengan media 8 tienen que ser 6, 7, 8, 9 y 10

Respuesta Ejercicio E

a) Supongamos inicialmente que el edificio tiene tantos pisos como quieras y deseas ir al tercero. ¿Cómo debes pulsar los botones para conseguirlo de la manera más rápida?

El ascensor subirá pisos múltiplos de 7 (7 pisos, 14 pisos, etc.) según que pulsemos el botón amarillo una vez, o dos, etc. De la misma manera, bajará múltiplos de 9. Para ir al tercero, necesitamos encontrar un múltiplo de 7 que sea 3 unidades más que un múltiplo de 9. Miramos 7, 14 y encontramos que 21 es 3+18. Así pues, si pulsamos el botón amarillo 3 veces y el verde 2, subiremos 21 pisos y bajaremos 18, con lo que quedaremos en el tercero.

b) Aunque no sea el método más rápido, sabiendo subir un piso y repitiendo dicha secuencia una y otra vez, se puede subir al piso que uno quiera. ¿Cuál es la manera más rápida de subir un sólo piso?

Ahora necesitamos un múltiplo de 7 que sea una unidad más que un múltiplo de 9. Probamos con 7, 14, 21 y vemos que 28=1+27, así que pulsando 4 veces el botón amarillo y 3 el verde, subiremos 28 pisos y bajaremos 27, con que habremos subido un piso en total

c) Si un visitante quiere subir al piso 15 usando el procedimiento descrito en el apartado anterior (repetir la secuencia que sube piso a piso). ¿Cuántas veces pulsa los botones en total? ¿Cuál es el menor número de pisos que tiene que tener el edificio para que sea posible llegar al piso 15 de esta manera?

Cada piso que queremos subir de esta manera necesita 7 pulsaciones (4 al amarillo y 3 al verde), así que para subir de esta manera 15 pisos, necesitaremos 7.15=105 pulsaciones.

Ahora el orden en que pulsemos los botones es importante porque si pulsamos ↑↑↑↑↓↓↓, subimos 28 pisos por encima del piso del que empezamos. Sin embargo, si pulsamos ↑↑↑↓↑↓↓ sólo subimos 21 por encima.

Lo que está claro es que, como queremos un método general (que funcione desde cualquier piso) para poder utilizarlo en cualquier ocasión, no podemos empezar bajando, por si estamos por debajo del piso 9. Tampoco podemos empezar con ↑↓ porque sólo funcionaría si empezamos en un piso por encima del 1º. Así que debemos empezar por ↑↑ y para no subir demasiado, luego bajar. La opción que sirve desde cualquier piso y que menos nos hace subir es ↑↑↓↑↓↑↓. Esta manera nos hace subir un piso (desde cualquiera) pero necesita que haya 14 plantas por encima de la de partida.

Para poder subir al piso 15 repitiendo este proceso, cuando estamos en el piso 14, con las dos primeras pulsaciones, llegaremos al piso 21. Esta es la máxima altura necesaria para que el método funcione.

Contenido extra:

Naturalmente, si se hubiese tratado de subir de piso en piso, pero la secuencia no tuviera que ser siempre la misma, no es necesario que el edificio sea tan alto.

Por ejemplo, pulsando ↑↑↓↑↓↑↓ para ir de la planta baja a la 1ª y de la primera a la 2ª, sólo necesitamos que haya piso 15. Después pulsamos ↑↓↑↑↓↑↓ para ir de la 2ª a la 3ª y para subir de la 3ª a la 4ª. Después utilizamos la secuencia ↑↓↑↓↑↑↓ para subir de la 4ª a la 5ª y de la 5ª a la 6ª, y tampoco superamos el piso 15. Y así sucesivamente hasta completar del piso 14º al 15º con la secuencia ↓↑↓↑↓↑↑. De esta manera, con 15 plantas, podemos ir de piso en piso. Pero si la secuencia de pulsaciones tiene que ser siempre la misma, necesitamos que el edificio tenga, al menos, 21 pisos.