



XXIX Olimpiada Matemática Junior en Cantabria

ORGANIZA



Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

PATROCINAN / COLABORAN



Facultad de **Ciencias**



Santillana
a Sanoma company



En 1846, a la edad de 19 años, Riemann comenzó a estudiar en la Universidad de Gotinga, donde el propio Gauss le recomendó dedicarse a las Matemáticas. En 1851 consiguió su doctorado ante Gauss y en 1857 empezó como profesor en la Universidad de Gotinga, donde llegó a ser director del departamento de matemáticas.



Ejercicio 1: La frutería

En la frutería cercana a la Universidad de Gotinga, nunca te dicen lo que cuesta una pieza de fruta, pero si les dices el dinero que llevas y lo que quieres, te dicen si puedes llevarte lo que deseas.



Al salir de la Facultad de Matemáticas, Emmy Noether se quiere llevar una manzana, un plátano y una naranja y ha ido con dos euros a la frutería.

El frutero le dice: “Tienes bastante para las tres piezas e incluso tendrías justo para un plátano más”.

Pero ella quiere saber el precio exacto y entonces le dice el frutero:

“Si decides llevarte solo un tipo de fruta, no puedes llegar a comprar cuatro plátanos, pero sí un máximo de cuatro manzanas. Además, si compras cinco naranjas ya no puedes comprar ninguna más”

Emmy hace sus cuentas y ve que hay varias posibilidades, entonces le vuelve a preguntar al frutero, y éste le dice: “Siete naranjas cuestan lo mismo que cinco manzanas”.

A partir de esas pistas, calcula razonadamente el precio de cada una de las piezas de fruta.

Solución:

Llamaremos:

- m : precio de una manzana (en céntimos)
- p : precio de un plátano (en céntimos)
- n : precio de una naranja (en céntimos)

Vamos a analizar poco a poco la información que se nos proporciona. Emmy se quiere llevar una manzana, un plátano y una naranja y ha ido con 2 € (es decir, 200 céntimos) a la frutería. El frutero le dice:

“Tienes bastante para las tres piezas e incluso tendrías justo para un plátano más”.

De aquí, obtenemos que: $2p + 1m + 1n = 200$ céntimos

Pero no podemos deducir nada concreto de esta ecuación.

Veamos cuál puede ser el precio de cada pieza de fruta. Para ello, el frutero le dice:

“Si decides llevarte solo un tipo de fruta, no puedes llegar a comprar cuatro plátanos”

Es decir: $4p > 200$ y $3p \leq 200$.



Por lo que el precio del plátano cumple: $p > 50$ y $p \leq 66$. Esto es, **el precio del plátano estará entre 51 céntimos y 66 céntimos.**

“pero sí, un máximo de 4 manzanas.”

Por lo tanto: $4m \leq 200$ y $5m > 200$.

Por lo que el precio de la manzana cumple: $m \leq 50$ y $m > 40$. Es decir, **el precio de cada manzana está entre 41 céntimos y 50 céntimos.**

“Además si compras cinco naranjas ya no puedes comprar ninguna más”.

Entonces: $5n \leq 200$ y $6n > 200$.

por lo que el precio de la naranja cumple $n \leq 40$ y $n > 33$. Así, tenemos que **el precio de la naranja está entre 34 céntimos y 40 céntimos.**

Como Emmy ha visto varias posibilidades, para averiguar el precio exacto vuelve a preguntar al frutero, y éste le dice:

“Siete naranjas cuesta lo mismo que 5 manzanas”.

Es decir, $7n = 5m$.

Esto significa que el precio de las naranjas tiene que ser múltiplo de 5 ($5m$ es un múltiplo de 5 y la única opción para que $7n$ sea múltiplo de 5 es que n sea múltiplo de 5) y como sabe que está entre 34 y 40 céntimos, sólo podría ser 35 o 40 céntimos.

- Si suponemos que $n = 35$ céntimos: $7 \cdot 35 = 5m \Rightarrow 245 = 5m \rightarrow m = 49$ céntimos
- Si suponemos que $n = 40$ céntimos: $7 \cdot 40 = 5m \Rightarrow 280 = 5m \rightarrow m = 56$ céntimos

Pero esta opción no puede ser ya que, según lo visto anteriormente, el precio de la manzana no puede superar los 50 céntimos.

Por tanto, **el precio de la naranja será de 35 céntimos** y el de la **manzana 49 céntimos** la unidad.

A partir de estos datos, Emmy ya puede calcular el precio de los plátanos:

$$2p + 1m + 1n = 200 \rightarrow 2p + 49 + 35 = 200$$

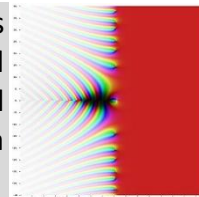
$$2p = 200 - 49 - 35 \rightarrow 2p = 116 \rightarrow p = 58$$

Con lo cual, el precio de cada pieza de fruta es:

- **Manzana: 49 céntimos**
- **Naranja: 35 céntimos**
- **Plátano: 58 céntimos**



La hipótesis de Riemann es actualmente uno de los problemas sin resolver más importantes de las Matemáticas. Fue formulado por Riemann en 1859 y en el año 2000, el Instituto Clay lo estableció como uno de los problemas del milenio, ofreciendo un premio de un millón de dólares a quien desarrolle una demostración correcta de la conjetura



Ejercicio 2: El premio

Gané un importantísimo premio a la lotería, pero no te voy a decir de cuánto dinero se trata. Lo tienes que averiguar tú con las pistas que te doy:

- Es un número de siete cifras.
- Cada cifra y su simétrica respecto al centro, suman 9.
- La segunda cifra es la primera menos uno, mientras que la tercera es la segunda menos uno.
- El producto de la primera por la tercera es 24.
- El cuarto dígito es igual a la suma del segundo más el tercero

Averigua de cuánto dinero era el premio.

Solución:

El producto de la primera cifra por la tercera es 24 así que pueden ser 3 y 8 o 4 y 6. Puesto que la segunda es la primera menos uno y la tercera es la segunda menos uno, tenemos que la tercera es la primera menos dos, así que son 6 y 4:

6		4				
---	--	---	--	--	--	--

Así que la segunda es 5 y como, con los simétricos tienen que sumar 9, tenemos

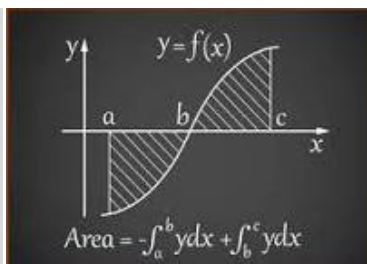
6	5	4		5	4	3
---	---	---	--	---	---	---

Como sabemos que la cuarta cifra es la suma de la segunda más la tercera, obtenemos que el premio fue de 6 549 543 €



La integral de Riemann sentó la primera base sólida sobre la cual se desarrolló el concepto de integral, iniciado por Descartes, Newton o Leibniz. Básicamente, una integral es una generalización de una suma de infinitos sumandos.

En el siguiente ejercicio, habrá que sumar sólo unos pocos números.



Ejercicio 3: El tablero numérico

En el siguiente tablero hay colocadas 10 fichas, cada una con un número natural diferente de una sola cifra (es decir, los números del 0 al 9). A los márgenes de la tabla hay pistas con la siguiente información:

- A la izquierda aparece el número de fichas que hay en cada fila (horizontal) y en la parte superior las que hay en cada columna (vertical).
- A la derecha aparece el total de la suma de los números de cada fila y abajo está la suma de cada columna.
- Fíjate además que hay 5 informaciones en los márgenes de la tabla que están incompletos.

	2 fichas	1 ficha	4 fichas	0 fichas	3 fichas	
1 ficha						Suman 6
3 fichas						Suman 9
2 fichas						Suman 11
4 fichas						Suman __
__ fichas						Suman __
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suman __	Suman __	

Coloca en el tablero de forma razonada las 10 fichas con el número de cada una y completa razonadamente las pistas faltantes.



Solución:

En primer lugar, se pueden completar los huecos faltantes en las condiciones:

- Sabemos que hay 10 fichas (formadas por los números del 0 al 9). A partir de las condiciones del número de fichas que hay que cada fila, vemos que la suma de fichas de las 4 primeras filas es 10; por lo tanto, en la última fila hay 0 fichas.
- Como en la última fila y en la cuarta columna no hay ninguna ficha, la suma debe dar cero.
- La suma de las 10 fichas (del 0 al 9) suman 45. De esta forma, se obtiene las últimas dos condiciones de suma de la fila y la columna restantes, que serán 19 y 9 respectivamente

Para decidir en qué casillas hay alguna ficha, podemos descartar las de la fila y las de la columna en la que no hay fichas. Eso lleva a colocar 4 fichas en la fila y en la columna donde hay 4 fichas. A continuación, podemos descartar las casillas de la fila y columna en las que hay una ficha, porque ya la hemos colocado. Entonces, ya sabemos dónde van las fichas de la fila y la columna con 3 fichas y así quedan colocadas las 10 fichas, señaladas a continuación con una F

	2 fichas	1 ficha	4 fichas	0 fichas	3 fichas	
1 ficha			F			Suman 6
3 fichas	F		F		F	Suman 9
2 fichas			F		F	Suman 11
4 fichas	F	F	F		F	Suman 19
0 fichas						Suman 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suman 0	Suman 9	



En la fila y en la columna que sólo tienen una ficha, sabemos qué ficha es, puesto que conocemos su suma: 6 y 5 respectivamente. En la primera columna, hay dos fichas que suman 1, así que tienen que ser la 0 y la 1. Si la de la fila con 3 fichas fuese 1, las otras dos de su fila sumarían 8, que es imposible porque, al ser todas las fichas distintas, no puede ser ni 4+4, ni 3+5, ni 2+6, ni 1+7, ni 0+8 porque las ficha 5, 6, 1 y 9 ya están puestas.

Una vez fijados el 0 y el 1, las dos fichas que faltan de la segunda fila, tienen que sumar 9 y no puede ser 4+5, ni 3+6, ni 1+8, así que son 2 y 7. Pero la de más a la derecha no puede ser 7 porque con las dos de debajo tiene que sumar 9. Así que esta ficha es la 2 y las dos debajo tienen que ser la 3 y la 4. Como las dos que quedan son la 8 y la 9, el hecho de que las dos de la tercera fila tienen que sumar 11, determina la disposición final:

	2 fichas	1 ficha	4 fichas	0 fichas	3 fichas	
1 ficha			6			Suman 6
3 fichas	0		7		2	Suman 9
2 fichas			8		3	Suman 11
4 fichas	1	5	9		4	Suman 19
0 fichas						Suman 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suman 0	Suman 9	

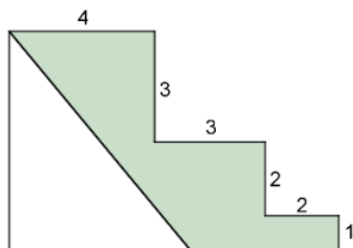


Una de las grandes aportaciones de Riemann es la Geometría de Riemann, que generaliza la Geometría no euclídea hiperbólica, descubierta por Gauss, Bolyai y Lobachevsky.

Aquí nos quedamos con geometrías más sencillas y te proponemos un ejercicio de áreas y perímetros.



Ejercicio 4: La figura escalonada

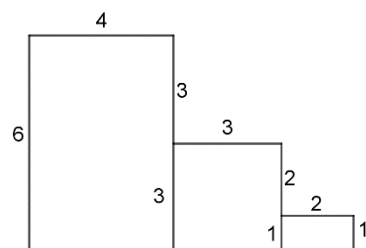
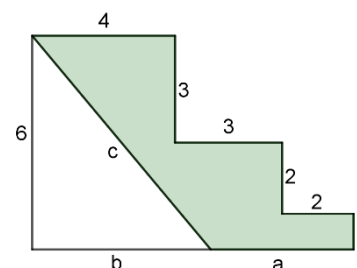


En la siguiente figura están indicadas las medidas de algunos lados y se sabe que el perímetro de la figura sombreada es 4 unidades más que el perímetro del triángulo blanco. Averigua el área de la figura sombreada.

Solución:

Sumando las medidas de los segmentos verticales obtenemos que la altura total de la figura es 6 unidades. De la misma manera, obtenemos que su base mide 9 unidades.

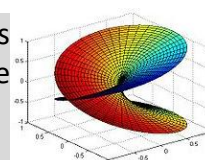
Vamos a llamar a , b y c a las medidas que nos faltan, como se muestra en la figura. Entonces, el perímetro de la figura sombreada es $a + c + 15$ (que es la longitud de la parte escalonada). El perímetro del triángulo es $b + c + 6$. Como el primer perímetro es 4 unidades más que el segundo, entonces $a + c + 15 = b + c + 6 + 4$, de donde $a + 5 = b$. Puesto que a y b juntos son la base de la figura, que mide 9, entonces $a + 5 = 9 - a$, por lo que $a = 2$ y $b = 7$



Ahora sabemos que el área del triángulo es $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$ unidades. El área de la figura completa (la parte sombreada junto con la parte blanca) se puede obtener descomponiéndola en tres rectángulos de áreas 4×6 , 3×3 y 2×1 que hacen un total de $24 + 9 + 2 = 35$ unidades cuadradas. De esta manera, obtenemos que el área de la figura sombreada es la diferencia $35 - 21 = 14$ unidades.

Otra importante aportación de Riemann a las Matemáticas fueron las superficies de Riemann, que no se definen sobre los números reales que se estudian en Secundaria, sino sobre los números complejos.

En esta ocasión, vamos a colorear otras superficies más sencillas.



Ejercicio 5: Las fichas de colores

Disponemos de fichas con forma de triángulo equilátero dividido en tres partes iguales, como en la figura. Queremos pintarlas coloreando (con colores distintos o repetidos) cada una de las tres partes.

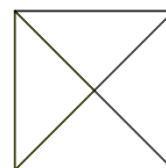


- a) ¿Cuántas fichas distintas* podremos hacer si disponemos de dos colores diferentes?



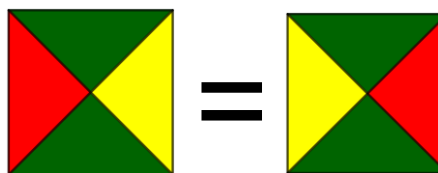
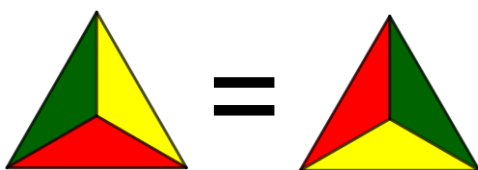
- b) ¿Cuántas fichas distintas* podremos hacer si disponemos de tres colores diferentes?

Tenemos ahora fichas cuadradas divididas en cuatro partes iguales como las de la figura:



- c) ¿Cuántas fichas distintas* podremos hacer si disponemos de dos colores diferentes?
d) ¿Cuántas fichas distintas* podremos hacer si disponemos de tres colores diferentes?

*Ten en cuenta que, al ser fichas, se pueden girar y por tanto cada una de estas parejas de fichas son la misma.



Solución:

- a) Para describir mejor las piezas, pongamos que los colores son rojo (R) y verde (V).
Si las tres partes son del mismo color hay dos posibilidades: RRR y VVV
Si dos son de un color y la tercera del otro color, hay otras dos posibilidades: RRV y VVR. Cualquier otra posibilidad es un giro de una de las anteriores: **4 posibilidades**
- b) Para describir mejor las piezas, pongamos que los tres colores son rojo (R), verde (V) y amarillo (A).
Si las tres partes son del mismo color hay tres posibilidades: RRR, VVV y AAA
Si dos son de un color y la tercera del otro color, hay otras seis posibilidades: RRV, RRA, VVR, VVA, AAR y AAV.
Si las tres partes son de colores distintos, hay dos posibilidades más: RVA y RAV.
Cualquier otra posibilidad es un giro de una de las anteriores: **11 posibilidades**
- c) Si las cuatro partes son del mismo color hay dos posibilidades: RRRR y VVVV
Si tres son de un color y la cuarta del otro color, hay otras dos posibilidades: RRRV y VVVR.
Si son dos de un color y las otras dos del otro, hay otras dos posibilidades: los colores seguidos RRVV o los colores alternos RVRV. **6 posibilidades**
- d) Si las cuatro partes son del mismo color hay tres posibilidades: RRRR, VVVV y AAAA
Si tres son de un color y la cuarta de otro color, hay otras seis posibilidades: RRRV, RRRR, VVVR, VVVA, AAAR y AAAR.
Si dos partes son de un color y las otras dos de otro, hay tres formas de escoger los colores (RV, RA y AV) y se pueden poner juntos o alternos: RRVV, RVRV, RRAA, RARA, AAVV y AVAV.
Si dos partes son de un color y las otras dos de los otros dos colores, hay que distinguir si las dos partes del mismo color están juntas o no. En el primer caso, hay dos posibilidades por cada color: RRVA, RRAV, VVAR, VVRA, AARV y AAVR. Con la otra posibilidad, elegido el color que va en las secciones opuestas, sólo hay una ficha posible, como se mostraba en el enunciado. **24 posibilidades**