XXVIII Olimpiada Matemática Junior en Cantabria

ORGANIZA

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

PATROCINAN / COLABORAN

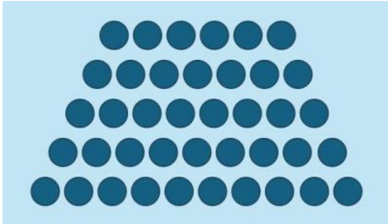
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

UC | Facultad de Ciencias

GOBIERNO de CANTABRIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL Y UNIVERSIDADES

CASIO

Santillana
a Sanoma company



El número 2025 es uno de los llamados corteses o trapezoidales, que son los que se pueden poner como suma de varios números consecutivos. De ahí el nombre *trapezoidal*. En la imagen, la cantidad de puntos es
6 + 7 + 8 + 9 + 10.
El número 2025, no sólo es cortés, sino muy cortés porque se puede escribir como suma de números consecutivos ¡de 14 formas distintas! Por ejemplo 11 + 12 + 13 + … + 63 + 64 o también 674 + 675 + 676 y así doce veces más.

Ejercicio 1: La suma extraña

Marta, Elena y Ángel están jugando a un juego de sumar. Se empieza por el número 14 y suman por turnos (se desconoce el orden en que participan). El primer jugador suma 1, el segundo suma 2 y el tercero suma 3. Tras varias rondas se oye a Marta decir el 41; después de un rato Ángel dice el 62 y enseguida Elena dice 69.

a) ¿Cuál es el orden de los jugadores? Es decir, ¿quién suma 1, quién suma 2 y quién suma 3?
b) ¿Quién de los tres dirá 2025? ¿Tras cuántas rondas?

Solución:

En cada ronda, se suma 1 + 2 + 3 = 6 así que cada participante dice 6 unidades más que en la ronda anterior.

41 = 14 + 27 = 14 + 6.4 + 1 + 2 así que Marta es la que suma 2.

62 = 14 + 48 = 14 + 6.7 + 1 + 2 + 3 así que Ángel es el que suma 3.

69 = 14 + 55 = 14 + 6.9 + 1 así que Elena es la que suma 1.

En general, en la ronda n, Elena dice los números $6n+9$, Marta los números $6n+11$ y Angel dice los números de la forma $6n+14$.

2025 = 14 + 2011 = 14 + 6.335 + 1 así que es a Elena a quien le tocará decir 2025 y será durante la ronda 336.

Otra de las propiedades curiosas del número 2025 es que coincide con la suma de los cubos de los dígitos de nuestro sistema de numeración:

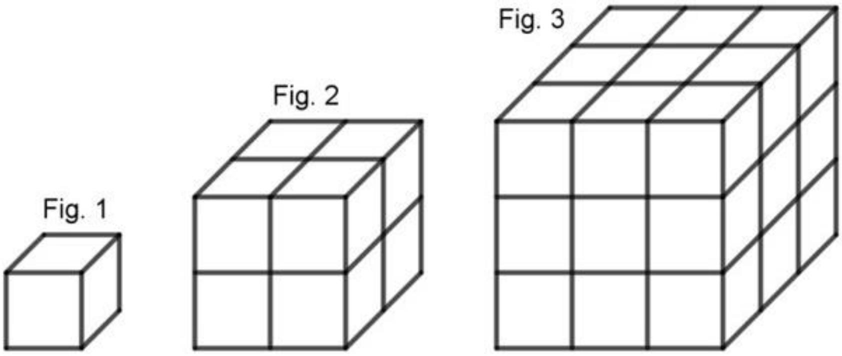
$$0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 2025$$

Ejercicio 2: Los cubos

Tenemos un número suficientemente grande de cubitos como el de la figura 1.

a) Los apilamos formando un cubo de 2 x 2 x 2 cubitos. ¿Cuántos cubitos no se ven sin variar el punto de vista de la figura? Basta con que veas una de las caras del cubito para considerar que se ve (*figura 2*).
b) Tomamos 27 cubitos y los apilamos hasta formar un cubo de 3 x 3 x 3 (*figura 3*), ¿cuántos cubitos no ves?

c) Se hace lo mismo con el cubo 4 x 4 x 4 = 64. ¿Cuántos cubitos verás?
d) ¿Y en el caso de que se apilen n x n x n = n^3 cubitos? (Explica las conclusiones a las que llegues)



Solución:

a) En el primer caso, se ven los 4 cubitos del piso superior y 3 del piso inferior, es decir, se ven todos los cubitos salvo el de la esquina del fondo. Total 7 visibles y 1 no visible.

b) Esta esta figura, se ven los 9 del piso superior y 5 de cada uno de los otros pisos: en total 19 cubitos visibles.

   De los 27 cubos que forman la figura, los ocultos corresponden a los 8 del cubo 2x2x2 de la esquina del fondo.

c) Ahora se verán 16 + 7 + 7 + 7 = 37 cubitos (los 7 corresponden a los 4 de la fila de delante y 3 del costado, ya que uno del costado ya lo hemos contado).

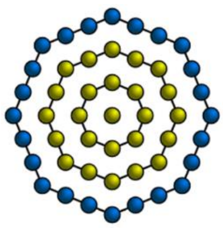
   Quedarán ocultos 3x3x3 = 27 cubitos: 37 cubitos visibles + 27 no visibles hacen el total de 64 cubitos.

d) Repitiendo los dos razonamientos de los pasos anteriores, obtendríamos

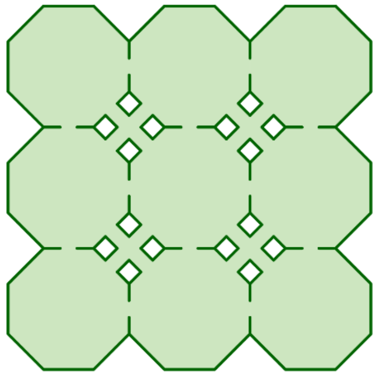
   $n^2 + (2n - 1) + (2n - 1) + \ldots + (2n - 1) = n^2 + (n - 1).(2n - 1) =$
   $= n^2 + 2n^2 - 3n - 1 = 3n^2 - 3n + 1$ cubitos visibles.

   O bien n^3 totales menos $(n - 1)^3$cubitos no visibles.

Los números poligonales centrados son una familia de números que están formados por la cantidad de puntos que se necesitan para representar una figura poligonal regular, con un punto en el centro y los puntos con la forma del polígono alrededor. El número 2025 es el vigésimo tercer número octogonal centrado



Ejercicio 3: Los robots



En una empresa se fabrican tres clases de robots: los alfa (α), los beta (β) y los gamma (γ); y de cada uno de ellos existen tres modelos diferentes: el 1, el 2 y el 3. En la empresa los tienen almacenados, sin mezclar, en nueve habitaciones, como se muestra en el plano de la figura de la derecha.

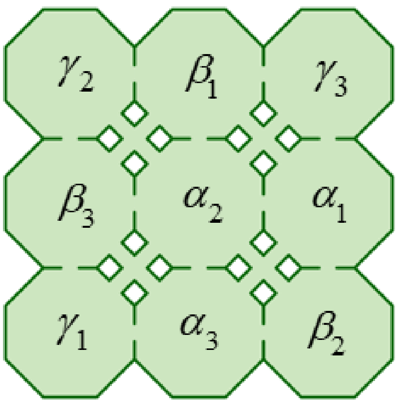
Junto al plano, aparecen las siguientes indicaciones:

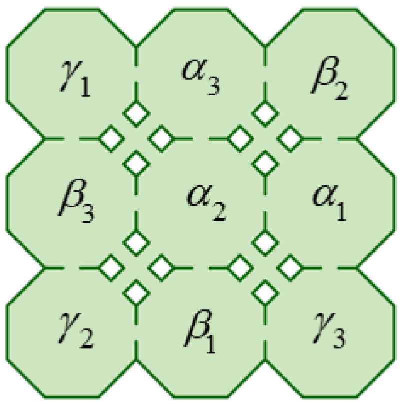
- En cada fila (horizontal) y en cada columna (vertical) hay un modelo 1, 2 y 3.
- Todos los modelos 2 están en una diagonal del plano.
- Todas las habitaciones donde están los robots de la clase alfa están comunicadas por algún pasillo.
- Las habitaciones de los robots de la clase gamma no están en contacto unas con otras.
- La clase beta tiene dos modelos de robots en dos habitaciones que están conectadas y el otro modelo están en una habitación que está separada de las dos anteriores por otra habitación.
- A la derecha de la habitación del modelo 2 de la clase gamma, se encuentra la habitación del modelo 1 de la clase beta.

A partir de estas anotaciones, coloca cada modelo de robot en su habitación correspondiente.

Solución:

Siguiendo detalladamente las anotaciones, obtenemos dos posibles soluciones:





Sin embargo, si comparamos ambas soluciones, veremos que son simétricas: la primera fila se intercambia con la tercera; permaneciendo fija la segunda fila. Depende de qué diagonal consideremos en la pista 2. Por lo tanto, ambas son la misma solución.

Ejercicio 4: Los bombones

Queremos comprar 2025 bombones. Hemos ido a la confitería y nos han dicho que sólo tienen cajas de 20 bombones y de 39 bombones. ¿Cuántas cajas tendremos que comprar de cada tipo para conseguir la cantidad exacta que queremos?

Ya hemos visto que el número 2025 es el cuadrado de la suma de todas las cifras de nuestro sistema de numeración: $(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 2025$
Pero curiosamente también cumple que $2025 = (20 + 25)^2$

Solución:

Podemos abordar el problema haciendo un tanteo y ajustando después. Por ejemplo, si tratásemos de usar sólo cajas de 20 bombones, como 2025 : 20 = 101'25 si compráramos 102 cajas tendríamos 2040 bombones, que son 15 más de los que queremos. Pero si cambiamos un par de cajas de 20 por una de 39, tendremos un bombón menos. Si hacemos ésto mismo 15 veces y compramos 15 cajas de 39 bombones y 102 – 15.2 = 72 cajas de 20, tendremos los 2025 bombones.

Una vez encontrada una solución, para ver si hay más soluciones, habría que quitar cajas de un tipo y poner del otro, de forma que se mantenga el total de bombones. Pero el número de bombones en cajas de 20 será un múltiplo de 20 y lo mismo con el otro tipo de cajas. Así que los bombones a quitar/añadir, tendrán que ser múltiplos de 20 y de 39, cuyo mínimo común múltiplo es justamente 20.39. Así que la única manera es quitar/poner 39 cajas de 20 bombones y poner/quitar 20 cajas de 39 bombones. Si la solución encontrada era 15 cajas de 39 y 72 cajas de 20, no podemos quitar 20 cajas de 39. La única posibilidad es quitar 39 cajas de 20 bombones y sustituirlas por 20 cajas de 39 y tendríamos 33 cajas de 20 bombones y 35 cajas de 39 bombones. Y ya no podemos volver a quitar otras 39 cajas de 20, así que estas dos son las únicas soluciones posibles.

También podríamos haber encontrado las soluciones sin tantear, ayudándonos del leguaje algebraico:
Compraremos a cajas de 20 bombones y b cajas de 39 bombones. Entonces $20a + 39b = 2025$. Así, $20a = 2025 - 39b$, por lo que $2025 - 39b$ tiene que ser múltiplo de 20. De momento, tiene que acabar en 0, así que b tiene que ser 5 multiplicado por un número impar (5 por un número par termina en 0 y la resta terminaría en 5): $b = 5.(2n + 1)$ con lo que $2025 - 39b = 2025 - 39.5.(2n + 1) =$

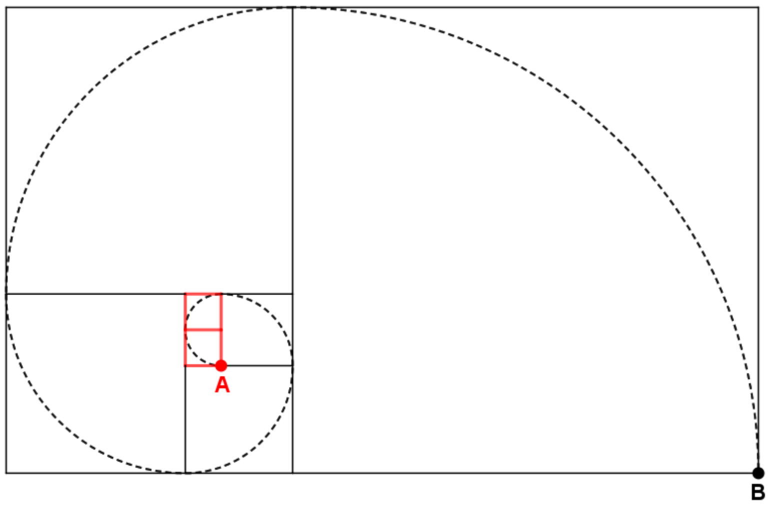
2025 – 290*n* – 195 = 1830 – 290*n* que, claramente, acaba en cero. Pero no tenía que ser múltiplo de 10, sino de 20. Así que *n* también tiene que ser impar, ya que queremos que (1830 – 290*n*) : 10 = 183 – 29*n* sea par.

Entonces tenemos ya que el número de cajas de 39 bombones tiene que ser b = 5.(2*n* + 1) = 10*n* + 5, donde n es un número impar, es decir 15 o 35 (con 55 ya nos pasamos de los 2025 bombones) y así hemos obtenido las dos mismas soluciones de antes.

Ejercicio 5: La espiral de Durero

Una forma de crear rectángulos es juntando cuadrados. De esta forma, podemos generar infinidad de rectángulos diferentes, pero hay uno más "especial" que el resto que recibe el nombre de rectángulo áureo o rectángulo de oro.

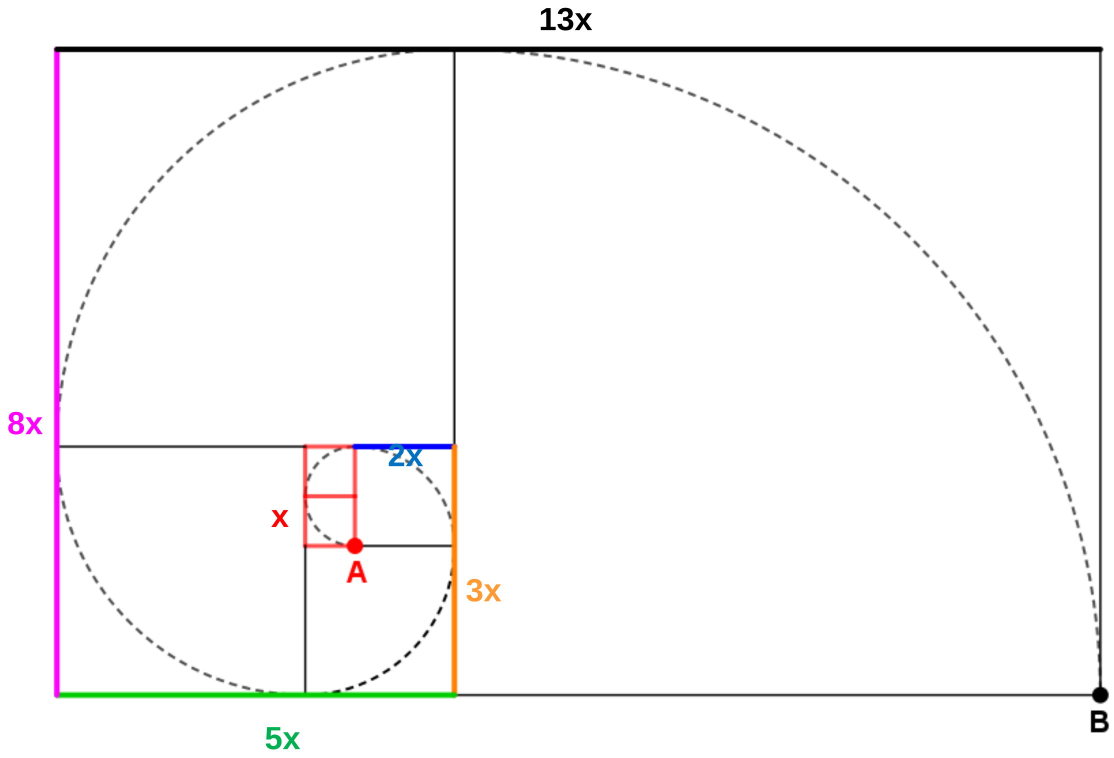
Comenzamos con dos pequeños cuadrados, dibujados en rojo, uno de los cuales tiene un vértice en el punto A. Después continuamos adosando un cuadrado a la derecha, después uno debajo, después uno a la izquierda, después uno encima, después de nuevo uno a la derecha, … Y así sucesivamente. En la figura, está representado el rectángulo formado por los primeros siete cuadrados, el último de los cuales tiene un vértice en el punto B.



A continuación, dibujamos un cuarto de circunferencia en el interior de cada uno de los siete cuadrados; cada cuarto de circunferencia une dos vértices opuestos de un cuadrado y tiene el centro en otro vértice del mismo cuadrado. Los primeros siete cuartos de circunferencia forman una "espiral" que va desde el punto A hasta el punto B. Esta espiral recibe el nombre de espiral áurea o espiral de Durero, en honor a su creador, Alberto Durero.

Si el perímetro del rectángulo formado por los primeros siete cuadrados mide 136 cm, ¿cuál es la longitud de la espiral desde A hasta B? (Expresa el resultado en función de π)

Solución:
Si llamamos *x* al lado del cuadrado rojo, los lados de los demás cuadrados serán *2x*, *3x*, *5x*, *8x* y *13x*.



De este modo, el rectángulo tendrá lados de longitud *13x* y *21x*; y su perímetro será:

$$2\cdot 13x+2\cdot 21x=16x+42x=68x$$

Como nos indican que el perímetro del rectángulo más grande vale 136 cm, obtenemos que el lado del cuadrado rojo será:

$$68x=136 \longrightarrow x=\frac{136}{68}=2\,\text{cm}$$

El lado de cada cuadrado corresponde también al radio del cuarto de circunferencia que se traza en su interior; cuya longitud viene dada por $\frac{2\pi r}{4}=\frac{\pi r}{2}$.

Por lo tanto, la longitud de la espiral es de:

$$\frac{\pi\cdot 2}{2}+\frac{\pi\cdot 2}{2}+\frac{\pi\cdot 4}{2}+\frac{\pi\cdot 6}{2}+\frac{\pi\cdot 10}{2}+\frac{\pi\cdot 16}{2}+\frac{\pi\cdot 26}{2}=\frac{66\pi}{2}=33\pi\,\text{cm}$$