XXVII Olimpiada Matemática Junior en Cantabria

ORGANIZA

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

PATROCINAN / COLABORAN

Ejercicio 1: Competición de esquí de montaña

En una carrera de esquí participan 6 esquiadores de los siguientes países: EEUU, España, Italia, Austria, Suiza y Francia. ¿Podrías decir cuál ha sido su clasificación si cumplen las siguientes condiciones?:

- Suiza quedó en una posición par.
- Francia llegó después que EEUU.
- Austria llegó en la posición que coincide con la medida de los catetos de un triángulo rectángulo e isósceles cuya hipotenusa mide $\sqrt{2}$.
- Italia llegó dos puestos después de España.
- España no quedó entre los tres primeros clasificados.

Respuesta:

El triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 y 1, tendrá hipotenusa $\sqrt{2}$, así que Austria quedó en primera posición.
España quedó en la posición 4, 5 ó 6. Pero Italia quedó dos posiciones detrás así que la única posibilidad es que España quedara 4ª e Italia 6ª
Entonces, para Suiza, sólo queda la 2ª posición.
Quedan por saber las posiciones 3 y 5. Puesto que Francia llegó después de EEUU, tiene que ser EEUU en 3ª posición y Francia en 5ª:

1º Austria – 2º Suiza – 3º EEUU – 4º España – 5º Francia – 6º Italia

Ejercicio 2: Un número muy grande

Si escribimos los números los números naturales del 1 al 100, uno a continuación del otro y en orden ascendente (es decir, de menor a mayor), obtenemos un número muy grande: 123456789101112131415…979899100

a) ¿Cuántas cifras tiene ese número?

Respuesta:

Para contar las cifras de una forma cómoda y rápida, podemos observar que este número está formado por:

- 9 números de una cifra (del 1 al 9)
- 90 números de dos cifras (del 10 al 99)
- 1 número de tres cifras (el 100)

Por lo tanto, el número de cifras que tiene el número es

$$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 192 \text{ cifras}$$

b) ¿Es múltiplo de 2, de 3, de 4, de 5, de 6, de 8?

Respuesta:

- Un número es múltiplo de 2 (o divisible entre 2) si acaba en cero o cifra par. Por lo tanto, **el número es múltiplo de 2** ya que su última cifra es cero.

- Un número es múltiplo de 3 (o divisible entre 3) si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Para calcular la suma de sus cifras nos fijamos en los números del 1 al 99: tenemos que escribir 20 veces cada cifra del 1 al 9 (10 veces como cifra de las decenas y 10 veces como cifra de las unidades). Como los ceros no son necesarios sumarlos, las cifras del número suman 1.20 + 2.20 + 3.20 + 4.20 + 5.20 + 6.20 + 7.20 + 8.20 + 9.20 + 1 (hay que contar el 1 del 100 final), es decir (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9).20 + 1 = 45.20 + 1 = 901 que no es múltiplo de 3. Por lo tanto, **el número no es múltiplo de 3**

- Un número es múltiplo de 4 (o divisible entre 4) si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo entre 4.

En este caso, las dos últimas cifras del número son 00. Por lo tanto, **el número es múltiplo de 4**.

- Un número es múltiplo de 5 (o divisible entre 5) si acaba en 0 o 5. Como nuestro número acaba en 0, entonces **es múltiplo de 5**.

- Un número es múltiplo de 6 (o divisible entre 6) si es múltiplo de 2 y de 3.

Tal y como hemos comprobado antes, el número es múltiplo de 2 pero no es múltiplo de 3; entonces **no es múltiplo de 6**.

- Un número es múltiplo de 8 (o divisible entre 8) si el número formado por sus tres últimas cifras es múltiplo de 8.

Las tres últimas cifras de nuestro número son 100, que no es múltiplo de 8. Por lo tanto, **no es múltiplo de 8**.

c) Si eliminamos 100 cifras de este número, de forma que el resultado obtenido sea el mayor número posible, ¿cuál será ese número?

Respuesta:

Para que el número sea el mayor posible, hay que buscar que las primeras cifras sean lo más altas posibles. De todas las cifras que aparecen en el número, la que tiene el valor más alto es el 9. Por lo tanto, debemos buscar el mayor número de nueves en las primeras posiciones.

Además, como tenemos que eliminar 100 cifras, y el número original tiene 192 cifras, el número que buscamos tendrá 192 – 100 = 92 cifras

Partiendo de nuestro número original 123456789101112 … 9899100, si eliminamos las 8 primeras cifras nos queda 9101112 … 9899100

Y obtenemos nuestro primer nueve. De esta forma, al eliminar 8 cifras del número original, nos quedan todavía por eliminar 100 – 8 = 92 cifras

Continuamos eliminando cifras hasta el siguiente 9 (el 9 de la cifra de las unidades del 19), el número obtenido es 99202122 … 9899100 y hemos eliminado 19 cifras más (9 números de 2 cifras, del 10 al 18, y el 1 de las decenas del 19); por lo tanto, quedan por eliminar 92 – 19 = 73 cifras

Siguiendo el mismo procedimiento para los siguientes números, eliminamos las siguientes 19 cifras hasta el siguiente 9, que es la cifra de las unidades del 29, quedando el número de la forma 999303132 … 9899100
y el número de cifras que quedan por eliminar son 73 – 19 = 54 cifras.

Reiterando el proceso para los números siguientes (del 30 al 39), tenemos que el número que queda al eliminar las cifras es 99994041 … 9899100
quedando por eliminar aún 54 – 19 = 35 cifras.

Repetimos el proceso para los números del 40 al 49. De este modo, el número resultado es 999995051 … 9899100
y el número de cifras que quedan por eliminar son 35 – 19 = 16 cifras

En el siguiente paso, es imposible llegar al siguiente 9 ya que es necesario eliminar 19 cifras y solo podemos suprimir 16. Pero si eliminamos las 15 primeras cifras de la secuencia formada por los números del 50 al 59, obtenemos el número 75859. Como podemos observar, la primera cifra que queda es un 7 (que es mayor que 5). Si ahora, eliminamos el 5 posterior al 7, el número que queda es 7859.

De este modo, hemos eliminado las 16 cifras restantes y la siguiente cifra del número final es la mayor posible.

Por lo tanto, el número final, tras eliminar las 100 cifras del número original, es:
9999978596061 … 99100

Ejercicio 3: El congreso de astronomía

Al terminar un importante congreso de astronomía, se quiso dar un detalle y un diploma de participación a todos los asistentes.

Los organizadores del acto pensaron que, para acabar antes, los congresistas deberían subir al escenario en grupos. Sin embargo, al tratar de agruparlos de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis, vieron que en todos los casos sobraba un participante.

No obstante, agrupándolos de siete en siete, todos los grupos quedaban iguales, con lo que el acto se llevó a cabo de esta forma.

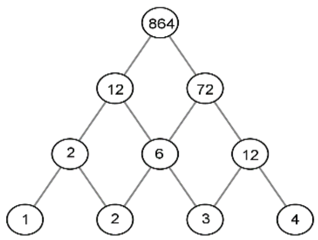
Sabiendo que eran menos de 700 asistentes, ¿podrías decir cuántos astrónomos y astrónomas acudieron al congreso?

Respuesta:

Al dividir el número de asistentes entre 2, sobra uno, así que el número de asistentes es el siguiente a un múltiplo de 2. También es el siguiente a un múltiplo de 3 y lo mismo con 4, 5 y 6. Es decir, es número que es el siguiente a un múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6. Como el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6 es 60, el número buscado será el siguiente a un cierto múltiplo de 60. Como tiene que ser divisible entre 7, podemos probar con 60.1+1=61, 60.2+1=121, 60.3+1=181, etc hasta encontrar que 60.5+1=301 es múltiplo de 7

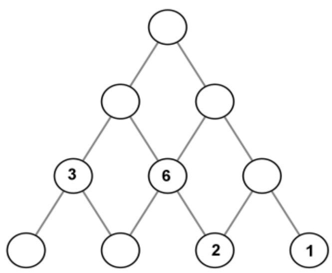
Para que al sumar un múltiplo de 60 volviera a salir múltiplo de 7, tendríamos que sumar 60.7=420. Es decir, el siguiente número que da resto 1 al dividir entre 2, 3, 4, 5 y 6 y que es divisible entre 7 es 301+420=721 que es mayor de 700. Así que la única solución posible es que hubiera 301 asistentes.

Ejercicio 4: Árbol de multiplicaciones

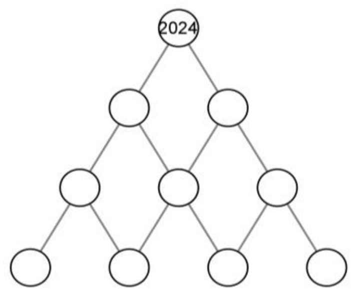


Se han dispuesto unas casillas sobre una rejilla triangular, de manera que cada casilla contiene un número natural que es el producto de los dos que tiene debajo, como en el ejemplo de la izquierda.

a) En esta primera rejilla, nos han rellenado cuatro casillas. ¿Qué número habrá en la casilla superior?

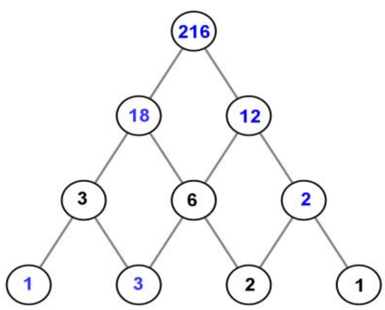


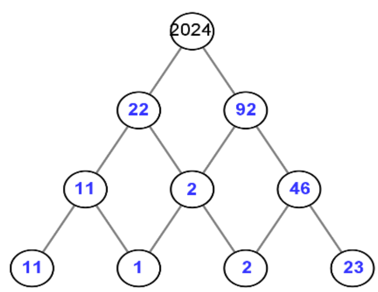
b) Rellena la segunda rejilla para que en la casilla superior esté el número 2024



Respuesta:

a) El número que falta en la casilla central multiplicado por 2 tiene que dar 6, así que se trata de un 3. De igual manera, deducimos que el número de abajo a la izquierda es un 1 y basta multiplicar para rellenar el resto. El número superior es 216





b) En número superior es el producto de los números inferiores (los factores del centro, aparecerán tres veces). Puesto que 2024 = 2^3.11.23, pero necesitamos cuatro factores, consideraremos 2024 = 1^3.2^3.11.23 y la solución será

Ejercicio 5: Contando triángulos

En la figura 1 hay 5 triángulos: 4 triángulos de lado unidad y el triángulo grande, de 2 unidades de lado.

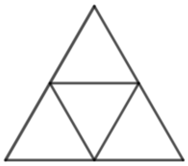


Figura 1

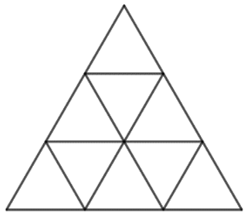


Figura 2

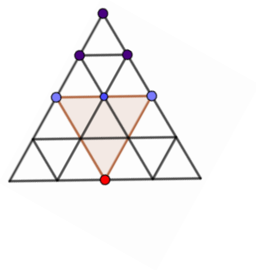
a) ¿Cuántos triángulos hay en total en la figura 2, que tiene 3 unidades de lado? Ten en cuenta que, ahora hay triángulos de lado 1, de lado 2 y de lado 3.

Respuesta:

En la figura 1 había 1+3=4 triángulos de lado 1. En la figura 2 hay 1+3+5=9
Triángulos de lado 2 hay los 3 que tienen como vértice superior los tres puntos superiores en la figura. Finalmente está el triángulo completo de lado 3
En total hay 9+3+1=13 triángulos

b) Si el triángulo grande tuviera 4 unidades de longitud, ¿cuántos triángulos tendría en total?

Respuesta:



Hay 1+3+5+7=16 triángulos de lado 1
Hay 1+2+3=6 triángulos de lado 2 (los que tienen como vértice superior un punto azul claro u oscuro) más otro invertido (con el vértice rojo)
También hay 1+2=3 triángulos de lado 3 (los que tienen los puntos azul oscuro como vértice superior)
Finalmente, hay 1 triángulo de lado 4
En total hay 16+6+1+3+1=27 triángulos

c) ¿Cuántos triángulos habría si el triángulo grande fuese de 10 unidades de lado?

Respuesta:
Siguiendo el proceso anterior:
Hay 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100 triángulos de lado 1 (**55** hacia arriba y **45** hacia abajo)
De lado 2 hay 1+2+3+4+5+6+7+8+9=**45** con el vértice hacia arriba y 1+2+3+4+5+6+7=**28** invertidos (con el vértice hacia abajo)
Hay 1+2+3+4+5+6+7+8=**36** de lado 3 en un sentido y 1+2+3+4+5=**15** en el otro.
De lado 4 hay **28** y **6**
De lado 5 son **21** y **1**
De lado 6 hay **15**. El triángulo invertido ya no cabe.
De lado 7 hay **10**.
De lado 8 hay **6** y de lado 9 sólo hay 1+2=**3.**
Finalmente, está el triángulo completo de lado 10.
En total son 55+45+36+28+21+15+10+6+3+1 en un sentido y 45+28+15+6+1 en el otro.
Es decir 55+36+21+10+3+2.(45+28+15+6+1)= 125+2.95=315 triángulos