XXVII Olimpiada Matemática Junior en Cantabria

ORGANIZA

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

PATROCINAN / COLABORAN

Ejercicio 1: Competición de esquí de montaña

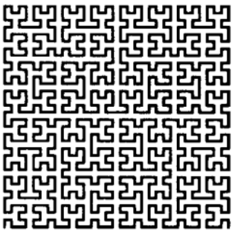
Desde hace unos años, se utiliza la geometría fractal para diseñar paisajes, especialmente para utilizar en el cine. Tienen un aspecto más realista que los diseñados a mano y admiten mayor grado de complejidad. Sustituyen, con buenos resultados, las costosas localizaciones naturales.

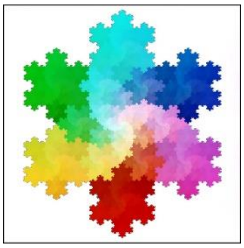
En una carrera de esquí participan 6 esquiadores de los siguientes países: EEUU, España, Italia, Austria, Suiza y Francia. ¿Podrías decir cuál ha sido su clasificación si cumplen las siguientes condiciones?:

- Suiza quedó en una posición par.
- Francia llegó después que EEUU.
- Austria llegó en la posición que coincide con la medida de los catetos de un triángulo rectángulo e isósceles cuya hipotenusa mide $\sqrt{2}$.
- Italia llegó dos puestos después de España.
- España no quedó entre los tres primeros clasificados.

Ejercicio 2: Un número muy grande

Las primeras curvas fractales surgieron a finales del siglo XIX y se construían, como lo mayor parte de los fractales repitiendo un proceso sencillo, un número ilimitado de veces. En 1891, el matemático alemán David Hilbert, describe una curva (por tanto, de dimensión 1) que rellena una superficie cuadrada (por tanto, de dimensión 2). Es una variante de las curvas que Giuseppe Peano propuso el año anterior.





En 1904, el matemático sueco Helge von Koch, propuso la curva llamada *copo de nieve de Koch*, construida iterando sobre un triángulo equilátero. Se obtiene una curva cerrada de longitud infinita y que encierra un área finita.

Si escribimos los números los números naturales del 1 al 100, uno a continuación del otro y en orden ascendente (es decir, de menor a mayor), obtenemos un número muy grande: 1234567891011121314 15…979899100

a) ¿Cuántas cifras tiene ese número?

b) ¿Es múltiplo de 2, de 3, de 4, de 5, de 6, de 8?

c) Si eliminamos 100 cifras de este número, de forma que el resultado obtenido sea el mayor número posible, ¿cuál será ese número?

Ejercicio 3: El congreso de astronomía

Una de las ideas de Mandelbrot era que la geometría fractal explicaba mejor que la geometría euclídea muchos elementos naturales. El sistema sanguíneo, las nubes, los pulmones o las galaxias eran algunos de estos elementos.

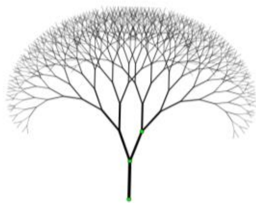
Al terminar un importante congreso de astronomía, se quiso dar un detalle y un diploma de participación a todos los asistentes.

Los organizadores del acto pensaron que, para acabar antes, los congresistas deberían subir al escenario en grupos. Sin embargo, al tratar de agruparlos de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis, vieron que en todos los casos sobraba un participante.

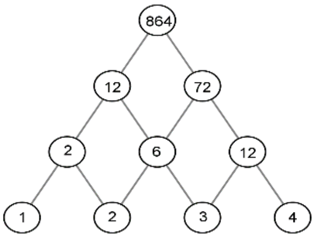
No obstante, agrupándolos de siete en siete, todos los grupos quedaban iguales, con lo que el acto se llevó a cabo de esta forma.

Sabiendo que eran menos de 700 asistentes, ¿podrías decir cuántos astrónomos y astrónomas acudieron al congreso?

Ejercicio 4: Árbol de multiplicaciones

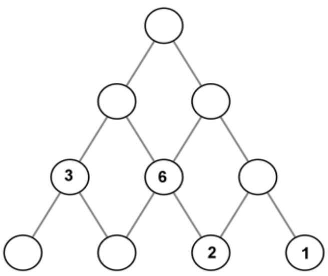


Se pueden utilizar fractales para diseñar dibujos de árboles. Cada parte del árbol es una repetición a diferente escala del resto del árbol, con tanto nivel de repetición como se desee.

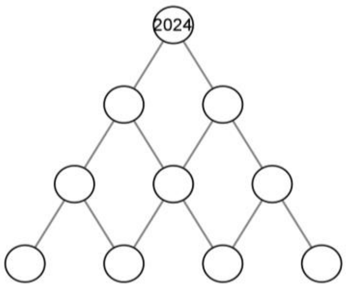


Se han dispuesto unas casillas sobre una rejilla triangular, de manera que cada casilla contiene un número natural que es el producto de los dos que tiene debajo, como en el ejemplo de la izquierda.

a) En esta primera rejilla, nos han rellenado cuatro casillas. ¿Qué número habrá en la casilla superior?

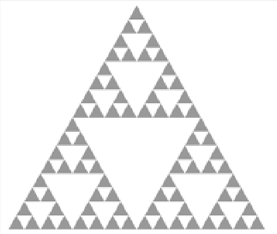


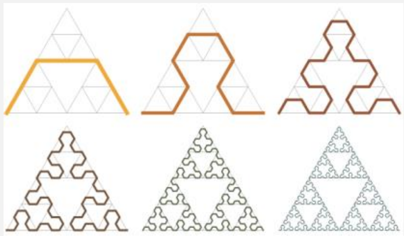
b) Rellena la segunda rejilla para que en la casilla superior esté el número 2024



Ejercicio 5: Contando triángulos

El matemático Waclaw Sierpinski (Varsovia 1882-1969) ideó un fractal construido eliminando el triángulo central de un triángulo equilátero y repitiendo el proceso sobre cada uno de los triángulos restantes, una y otra vez, hasta el infinito. El triángulo de Sierpinski tiene superficie cero y perímetro infinito. Se puede construir también como una curva fractal, al estilo de la curva de Hilbert.





En la figura 1 hay 5 triángulos: 4 triángulos de lado unidad y el triángulo grande, de 2 unidades de lado.

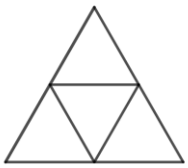


Figura 1

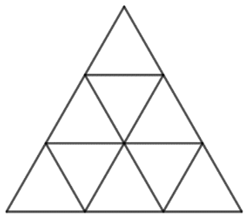
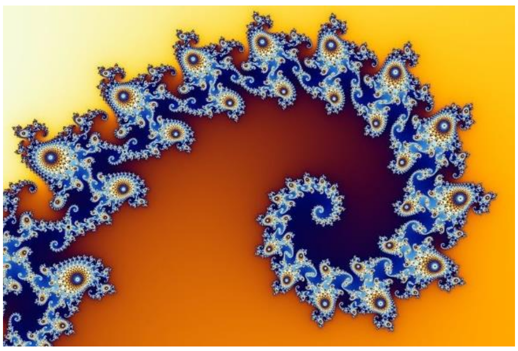


Figura 2

a) ¿Cuántos triángulos hay en total en la figura 2, que tiene 3 unidades de lado? Ten en cuenta que, ahora hay triángulos de lado 1, de lado 2 y de lado 3.
b) Si el triángulo grande tuviera 4 unidades de longitud, ¿cuántos triángulos tendría en total?
c) ¿Cuántos triángulos habría si el triángulo grande fuese de 10 unidades de lado?



Gracias por participar