XXVI Olimpiada Matemática para estudiantes de 2º de ESO en Cantabria

ORGANIZA

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

PATROCINAN / COLABORAN

GOBIERNO de CANTABRIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL

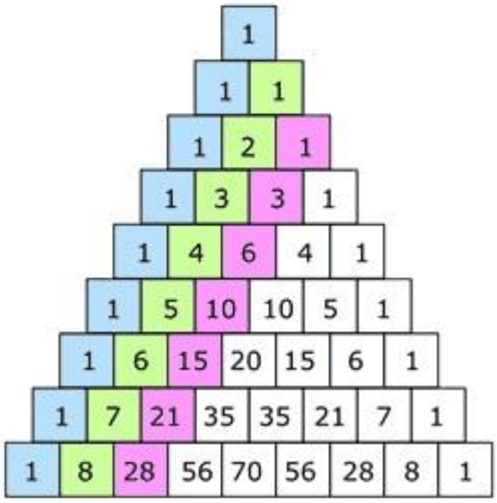
50 UC Universidad de Cantabria | Facultad de Ciencias

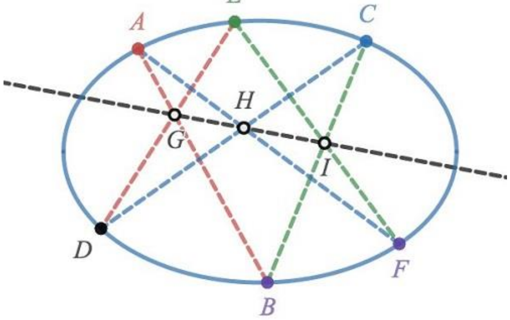
CASIO

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Santillana
a Sanoma company

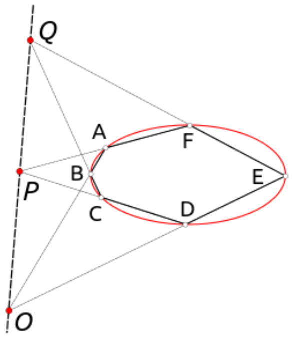
En este año 2023 se cumplen 400 años del nacimiento del matemático, físico y filósofo Blaise Pascal. A este gran científico, que nació en Clermont-Ferrand (Francia) el 19 de junio de 1623, le debemos importantísimas aportaciones como sus estudios sobre las cónicas, la ley de los vasos comunicantes, el diseño de la primera calculadora operativa, sus trabajos sobre el triángulo aritmético, la invención de la prensa hidráulica o sentar los fundamentos de la probabilidad.





En 1639, cuando Pascal tenía sólo 16 años, demuestra el Hexagrammum Mysticum Theorem, hoy en día conocido como *Teorema de Pascal*. Este teorema establece una propiedad sobre los hexágonos inscritos en una sección cónica.

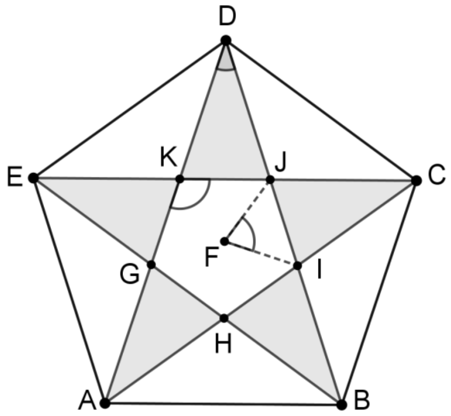
Vamos a fijarnos en el logo de la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria, que está inscrito en un hexágono.

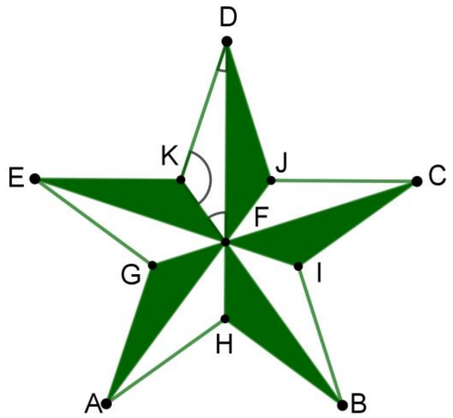


Ejercicio 1: El logo de SMPC

El logo de nuestra Sociedad Matemática SMPC está formado por una estrella de cinco puntas sobre otra estrella de seis puntas, inscrita en un círculo.

La estrella de cinco puntas se dibuja a partir de un pentagrama (la estrella pitagórica) que se obtiene al trazar las diagonales de un pentágono regular. Después obtenemos nuestra estrella, uniendo los puntos correspondientes.



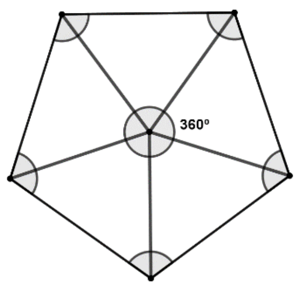


a) Calcula la medida de los ángulos IFJ, GKJ y KDJ de la primera figura.

Respuesta:

El ángulo IFJ es la quinta parte de la circunferencia completa así que mide 72º

En un pentágono regular trazamos sus cinco radios y sumamos todos los ángulos de los cinco triángulos obtenidos. Esta suma tiene que ser 5 x 180º = 900º ya que los tres ángulos de cada triángulo suman 180º. Si a estos 900º le quitamos los 360º del ángulo central, obtenemos 540º que será lo que sumen los cinco ángulos interiores del pentágono así que cada uno de ellos (en particular el ángulo GKJ) medirá 540º : 5 = 108º



Finalmente, el ángulo JKD (igual al DJK) es el suplementario del GKJ de manera que mide 180º - 108º = 72º. Como el polígono KJD es un triángulo, sus tres ángulos suman 180º, de manera que el ángulo KDJ mide 180º - 72º - 72º = 36º

b) En la estrella de cinco puntas (la figura de la derecha), calcula también la medida de los ángulos señalados de cada uno de los triángulos blancos (iguales que los verdes).

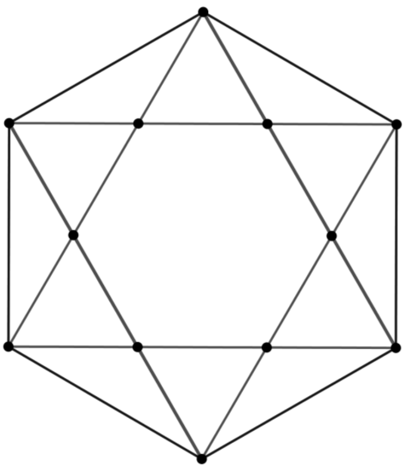
Respuesta:

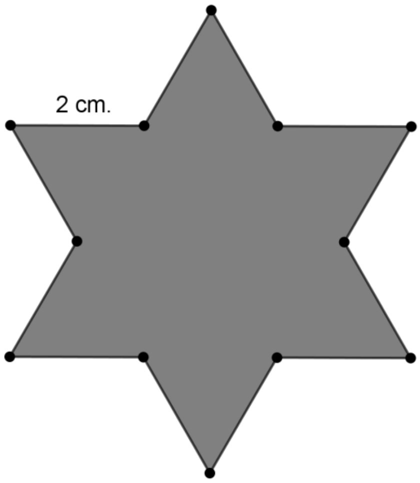
El ángulo DFK es la décima parte de la circunferencia completa, de manera que mide 36º

El ángulo KDF es la mitad del ángulo KDJ del apartado anterior, así que mide 18º

Finalmente, los tres ángulos pedidos están en el mismo triángulo así que suman 180º. De esta manera, el ángulo DKF medirá 180º - 36º - 18º = 126º

La estrella de seis puntas se dibuja trazando las diagonales de un hexágono regular

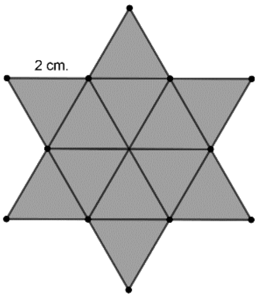


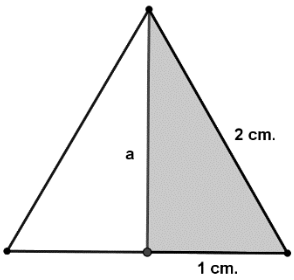


c) Si cada uno de los lados de la estrella de seis puntas mide 2 cm, ¿cuál es el área de toda la estrella?

Respuesta:

La estrella de seis puntas está formada por 12 triángulo equiláteros de 2 cm. de lado cada uno. Para calcular el área de cada uno de estos triángulos, necesitamos saber su altura y para ello, utilizamos el teorema de Pitágoras.



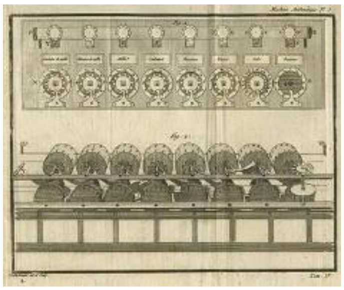


$1^2+a^2=2^2 \Rightarrow 1+a^2=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}\simeq 1'73\,\text{cm}$ y así el área de cada triángulo equilátero de 2 cm. de lado es $\dfrac{2\times\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ cm² y el de toda la estrella es $12\sqrt{3}$ cm² (o $\dfrac{2\times 1'73}{2}=1'73$ cm² y $12\times 1'73=20'76$ cm² si se prefiere hacer en forma decimal aproximada).

En 1641 Blaise Pascal comienza el diseño de la que se considera la primera calculadora: la Pascalina. En 1642 consiguió construir la primera de ellas, que sólo hacía sumas y en los años siguientes, amplió sus mecanismos para que hiciera también restas.

Sin embargo, la Pascalina no te ayudará a resolver el siguiente ejercicio:



Ejercicio 2: Últimas cifras

a) ¿En qué cifra acaban los números 2^{2023}, 4^{2023}, 8^{2023} y 16^{2023}?

Respuesta:

$2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$; $2^6 = 64$ y así sucesivamente. La cifra de las unidades de 2^7 es 2 por la cifra de las unidades de 2^6, que es 4. Así, la última cifra de las potencias de 2, son 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, …

Puesto que se repiten cada 4 potencias y 2023 = 505 x 4 + 3 (505 repeticiones y 3 potencias más) la última cifra de 2^{2023} es la misma que la última cifra de 2^3 que es 8

Pensando de la misma manera $4^1 = 4$; $4^2 = 16$; $4^3 = 64$; $4^4 = 256$ y así sucesivamente. Ahora, la última cifra se repite cada dos potencias (en lugar de cada cuatro): acaban en 4 las de exponente impar y en 6 las de exponente par. Así que 4^{2023} termina en 4.

También podíamos haber aprovechado el resultado anterior, teniendo en cuenta que $4^{2023} = \left(2^2\right)^{2023} = 2^{2\times 2023} = 2^{4046} = 2^{4\times 1011+2}$ que, según hemos visto antes, termina en la misma cifra que 2^2, es decir, 4

$8^1 = 8$; $8^2 = 64$; $8^3 = 512$; $8^4 = 4096$; $8^5 = 32768$ y se repiten cada 4 potencias (como las de base 2). Así que la última cifra de 8^{2023} es la misma que la de 8^3 que es 2. O también, $8^{2023} = \left(2^3\right)^{2023} = 2^{6069} = 2^{6\times 1011+3}$ que termina en 8

$16^1 = 16$; $16^2 = 256$; $16^3 = 4096$ y todas las potencias terminan en 6.

Un número que acaba en 0 es múltiplo de 2 y de 5, un número que acaba en dos ceros es múltiplo de 4 y de 5^2=25. Y si acaba en tres ceros (000) es múltiplo de 8 y de 5^3=125.

b) Sin hacer la multiplicación, ¿sabrías decirnos en cuántos ceros acaba el número que resulta de multiplicar todos los números del 1 al 200 (ambos incluidos)?

Respuesta:

Cada cero a la derecha de un número corresponde a una pareja 2-5 en su factorización. En una lista de números consecutivos, la mitad de ellos tienen el 2 como factor (todos los pares) y sólo uno de cada cinco tiene el 5 como factor. De esta manera, aparece menos veces el factor 5 que el factor 2. Así que tenemos que contar la cantidad de veces que aparece el factor 5:

- Uno de cada cinco números (5, 10, 15, …, 195, 200), es decir 200:5 = 40 números tienen el factor 5.
- Uno de cada 25 números (25, 50, 75, …, 200), es decir 200:25 = 8 números, tienen un segundo factor 5
- Finalmente, el número 125 tiene un tercer factor 5.

En total, el número 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x ….x 200 tiene el factor cinco 40 + 8 + 1 = 49 veces (y tendrá más de 49 veces el factor 2) así que terminará en 49 ceros.

A partir de 1953, sus discusiones con el caballero de Méré sobre los dados y otros juegos de azar, le llevaron a iniciar sus estudios sobre lo que posteriormente se conocería como *Teoría de la Probabilidad*. Las cartas que intercambiaron en 1654 Pascal y Pierre de Fermat sobre el tema, se consideran el inicio de esta disciplina.

Ejercicio 3: Las tres amigas

María, Clara y Lucía son tres amigas. Una es Matemática, otra médico y la tercera ingeniera y sus edades son 31, 35 y 36 (no necesariamente en ese orden).

a) Averigua el trabajo y la edad de cada una de ellas sabiendo que:
   1. Clara es la matemática.
   2. María es más joven que Lucía.
   3. La ingeniera no es la mayor.
   4. María no es ingeniera.

Respuesta

Directamente sabemos (1) que Clara es la matemática así que María y Lucía son la ingeniera y la médico. Como (4) María no es ingeniera entonces:

Clara: Matemática María: Médico Lucía: Ingeniera

Sabemos (3) que Lucía no es la mayor. Como, además (2) María es más joven que Lucía, entonces Lucía es la mediana, María la más joven y Clara la mayor:

Clara: 36 años María: 31 años Lucía: 35 años

b) Si hubiéramos asignado al azar a cada nombre una de las edades y uno de los trabajos, la probabilidad de acertar sería 1 dividido entre la cantidad de respuestas posibles. ¿De cuántas maneras distintas podríamos haber contestado, si lo hubiéramos hecho al azar?

Respuesta

Escogemos una de las tres personas (por ejemplo, María). Hay 3 posibilidades de asignarle la edad; una vez escogida su edad al azar, pensamos en otra persona (por ejemplo, Clara). Hay dos posibles edades a asignarle edad (porque una ya está asignada a María. Una vez escogida una edad para Clara, sólo queda una edad posible para Lucía. Así que hay 3 x 2 x 1 = 6 maneras de asignarles las edades (31-35-36, 31-36-35, 35-31-36, 35-36-31, 36-31-35 y 36-35-31).

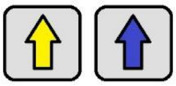
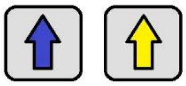
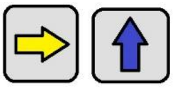
De igual manera, hay 6 formas de asignarles la profesión. Combinando cada una de las formas de asignar las edades con cada una de las formas de asignar las profesiones, tenemos 6 x 6 = 36 respuestas posibles al problema. Si hubiéramos contestado al azar, sólo tendríamos 1 posibilidad de entre 36 de contestar correctamente.

El triángulo aritmético que contiene los coeficientes binomiales (los números combinatorios) era conocido en diversas culturas desde los siglos X y XI. Pero hoy en día lo conocemos como triángulo de Pascal porque fue este matemático quien propuso la actual notación en su *Traité du triangle arithmétique* (Tratado sobre el triángulo aritmético) de 1653.

La combinatoria y en particular, el triángulo de Pascal, nos ayudan a contar. Aunque no vayas a utilizar los números combinatorio, te proponemos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 4: Las fichas

Disponemos de unas fichas cuadradas. Cada una tiene dibujada una flecha de un color diferente.

a) Cogemos dos fichas. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar una a la derecha de la otra?
Ten en cuenta que hay que escoger en qué orden y con qué orientación las colocamos: la disposición  es diferente de  pero también de 

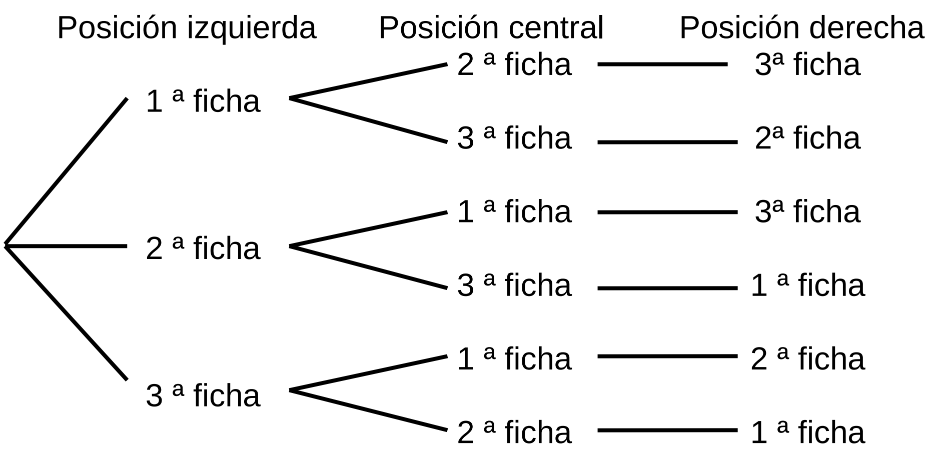
Respuesta:

Tenemos que elegir el orden en que colocamos las fichas de entre los dos posibles (1ª y 2ª o bien 2ª y 1ª) y tenemos que elegir con qué orientación colocamos cada una de ellas. Para cada una de las dos fichas hay 4 orientaciones posibles. Hay por tanto 2 x 4 x 4 = 32 formas posibles.

b) Ahora hacemos lo mismo poniendo en línea tres fichas de colores distintos. ¿De cuántas maneras diferentes podemos hacerlo?

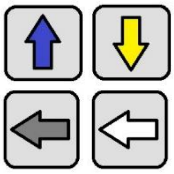
Respuesta:

En este caso, hay seis posiciones distintas: 3 posibilidades para decidir la ficha de la izquierda; 2 posibilidades para el centro (una vez colocada la de la izquierda) y una sola para posibilidad para la ficha de la derecha.



Para cada una de las tres fichas, vuelve a haber cuatro orientaciones distintas así que hay 6 x 4 x 4 x 4 = 384 posibilidades diferentes.

c) Pasamos ahora a hacerlo con cuatro fichas distintas, pero las disponemos formando un cuadrado de 2x2. Por ejemplo



¿Cuántas disposiciones diferentes son posibles?

Respuesta:

En este caso, hay 4 x 3 x 2 x 1= 24 posiciones distintas, así que hay 24 x 4 x 4 x 4 x 4 = 6144 posibilidades diferentes.

d) Terminamos poniendo 9 fichas (cada una con su flecha de color diferente y apuntando hacia algún lado) formando un cuadrado de tres filas y tres columnas. Calcula las diferentes maneras de conseguirlo.

Respuesta:

En este caso, hay 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1= 362 880 posiciones distintas, así que hay 362880 x 4^9 posibilidades diferentes.

El apellido Pascal proviene del nombre de la festividad de Pascua. En diversos países, se celebra la Pascua con un intercambio de huevos decorados. Con esta excusa, te proponemos el último ejercicio.

Ejercicio 5: La cesta de huevos

Un granjero tiene seis cestas de huevos. Cada una de ellas tiene huevos de una clase: de gallina o de pata. Además, cada cesta tiene el número de huevos que se indican: 6, 12, 14, 15, 23 y 29.

El granjero dice, señalando una cesta: “Si vendo esta cesta, me quedarán el doble de huevos de gallina que de pata”. ¿A qué cesta se refiere?

Respuesta:

En total hay 6 + 12 + 14 + 15 + 23 + 29 = 99 huevos. Después de la venta, queda doble de huevos de gallina que de pata, así que después de la venta, queda una cantidad de huevos múltiplo de tres. Como la cantidad total de huevos era múltiplo de tres sabemos que la cesta que vendió tenía una cantidad de huevos que también es múltiplo de tres.

Por lo tanto, las posibilidades son que venda la cesta de 6, 12 o 15 huevos (que son los únicos múltiplos de tres)

- Si vende la cesta de 6 huevos, le quedarían 93 huevos. Tendrían que ser 62 de gallina y 31 de pata. Pero no se puede obtener ni 31 ni 62 sumando las cantidades de huevos de las restantes cestas: 12 + 14 < 31 y si añadimos una tercera cesta, nos pasamos; lo mismo ocurre con 12 y 15; con 12 y 23 (o 12 y 29) ya nos pasamos; 14 + 15 < 31 y cualquiera de estas dos cestas junto con la de 23 ó 29 ya nos pasamos. Así que no es esa posibilidad.
- Si vende la cesta de 15 huevos, le quedarían 84 huevos. Tendrían que ser 56 de gallina y 28 de pata. Pero tampoco se puede obtener ni 56 ni 28 sumando las otras cantidades.
- Si vende la cesta de 12 huevos, le quedarían 87 huevos. Tendrían que ser 58 de gallina y 29 de pata. Esto sí puede ser y además, hay dos posibilidades:
    - las cestas de 6, 14, 15 y 23 son de gallina (58 en total) y la cesta de.29 es de pata.
    - las cestas de 6, 23 y 29 son de gallina (58 en total) y las cestas de.14 y 15 son de pata (los 29 restantes).

Por lo tanto, la solución es la cesta de 12 huevos.