El pasado mes de marzo se cumplió el 140 aniversario del nacimiento de E. Noether, una de las más importantes figuras de la Matemática del siglo XX. Entre sus muchos logros, destacan el concepto de anillo noetheriano, de gran importancia en el desarrollo del Álgebra abstracta y el teorema de Noether, que resultó clave en muchos campos de la Física teórica.

Aprovechando el aniversario de Emmy Noether, queremos hacer en esta prueba un pequeño homenaje a ella y a otras mujeres que han sido también cruciales en el desarrollo de las Matemáticas.

Emmy Noether

Sofía Kovalevskaya

Sophie Germain

Sophie Germain fue una matemática francesa nacida en 1776. Llamó la atención de otros grandes matemáticos contemporáneos suyos como Lagrange y Gauss. En particular, en 1830 Gauss la propuso para el Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Gotinga, aunque no logró que se lo otorgaran hasta un año después, cuando Sophie ya había fallecido.

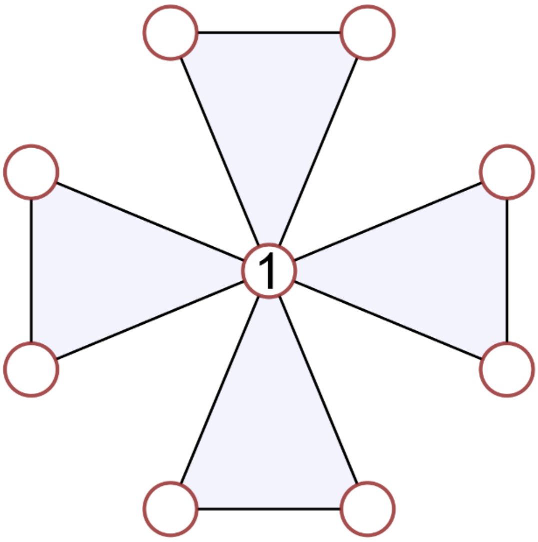
Es especialmente importante su trabajo en teoría de números, donde hizo importantes avances en la conjetura de Fermat. Aquí tenemos un ejercicio sobre números

Ejercicio 1

Se trata de colocar todos los números del 1 al 9 de manera que, en cada uno de los 4 triángulos, los tres números de los vértices sumen lo mismo.

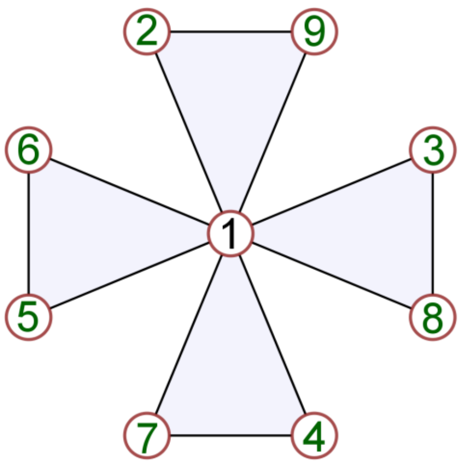
a) Complétalo con el número 1 en la posición central

b) ¿Se puede completar con otro número distinto en la posición central? ¿Qué números permiten completarlo y cuáles no?



Respuesta:

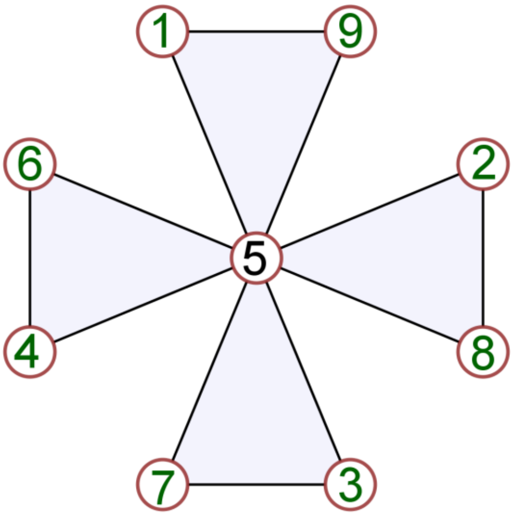
a) Debemos colocar los números del 2 al 9 y debemos ponerlos en cuatro parejas que sumen todas lo mismo. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 así que todos salvo el 1, suman 44, lo que hace cuatro parejas que suman 11 cada una: Las parejas tienen que ser 2-9, 3-8, 4-7 y 5-6. Por ejemplo:

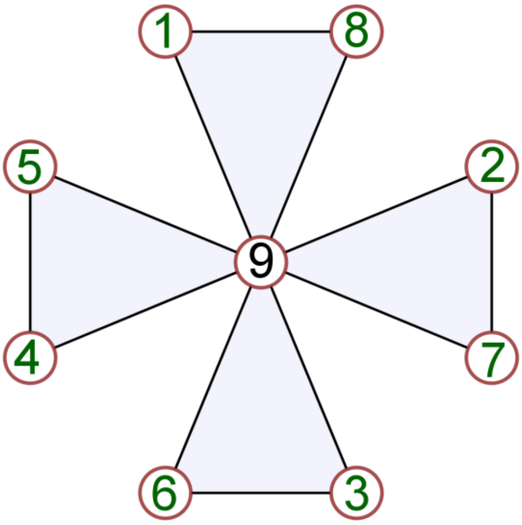


b) Si ponemos el 2 en la casilla central, los otros 8 números suman 45 – 2 = 43 y no se pueden repartir en cuatro parejas que sumen igual. Lo mismo ocurre si ponemos en el centro el 3 (los otros sumarían 45 – 3 = 42) o el 4 (sumarían 41). En cambio, si ponemos el 5 en el centro, los otros ocho números suman 40, que se puede repartir en cuatro parejas que sumen 10.

Tampoco sirve para el centro el 6 (los otros ocho números sumarían 39) ni el 7, ni el 8. La última posibilidad es poner en el círculo central el número 9 y repartir los otros ocho números (que suman 36) en cuatro parejas de suma 9 cada una de ellas.

Una solución para cada uno de estos dos nuevos casos sería





Sophie Germain hizo grandes aportaciones a la teoría de elasticidad. Un trabajo en este área le hizo ganar en 1816 un premio de la Academia Francesa de las Ciencias.

Germaine obtuvo interesantes propiedades de los llamados en su honor "números primos de Sophie Germain". Los primeros de estos números son 2, 3, 5, 11, 23, 29 y 41. Proponemos este ejercicio relacionado con los dos primeros primos de Germain.

Ejercicio 2

Sophie Germaine decide guardar el dinero del premio de la Academia de las Ciencias en siete cofres. Empieza guardando 2/3 del total en el primer cofre; en el segundo cofre guarda 2/3 del resto y así sucesivamente hasta el séptimo cofre. Hecho esto descubre que le sobra un franco, que guarda en su faltriquera. ¿A cuántos francos ascendía el premio? ¿Cuántos guardó en cada cofre?

Respuesta:

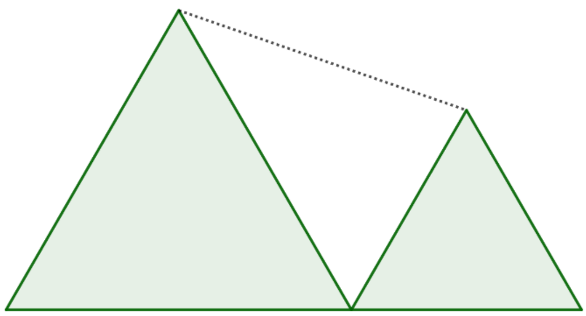
Ya que le sobró una moneda, ésto era 1/3 de lo que metió en el séptimo cofre, luego allí puso 2 monedas y antes tenía 3 monedas. Como después de guardar las monedas en el sexto le quedaban 3 (1/3) quiere decir que en el sexto puso 6 (2/3), así sucesivamente tendremos 18 monedas, en el 4º, 54 monedas, en el 3º, 162 monedas, en el 2º 486 monedas y el en 1º 1458 monedas. El total sería 1+2+6+18+54+162+486+1458=2187 monedas.

Otra muy destacada figura, esta vez del siglo XIX, es Sofía Kovalevskaya. Sus importantes aportaciones al Análisis y, en particular a las ecuaciones en derivadas parciales, le llevaron a ser la primera mujer en el mundo en doctorarse *suma cum laude* (en 1874 por la Universidad de Gotinga) y una de las primeras en obtener una plaza como profesora universitaria (Universidad de Estocolmo 1884)

Ya de muy joven, Sofía sorprendió a uno de sus profesores cuando éste descubrió que ella había aprendido de forma autodidacta las bases de la trigonometría. La palabra trigonometría proviene del griego (trigon: triángulo y metron: medida) y significa medir los triángulos. Pues pasemos a un problema con triángulos:

Ejercicio 3

Tenemos dos triángulos equiláteros dispuestos uno a continuación del otro, unidos por un vértice, tal y como indica la figura.



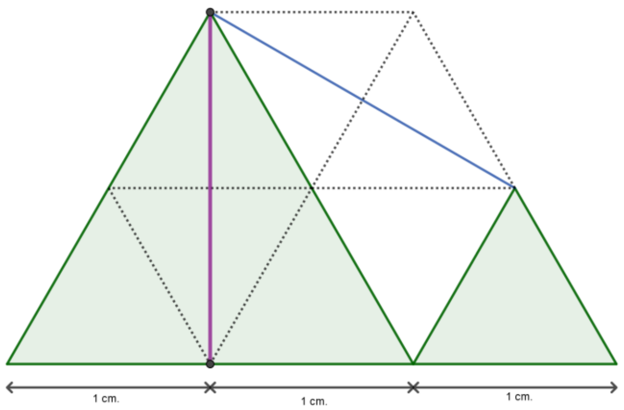
Calcula la distancia entre los vértices superiores

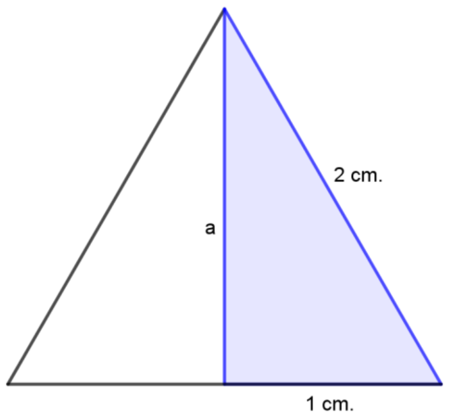
- **a)** Si los lados de los triángulos miden 2 cm. y 1 cm. respectivamente.
- **b)** Si los lados de los triángulos miden 3 cm. y 2 cm. respectivamente.
- **c)** Si los lados de los triángulos miden 3 cm. y 1 cm. respectivamente.

Respuesta:

El apartado a) es un caso muy particular y vamos a proponer una solución diferente a la general que vamos a aplica en los otros apartados.

Podemos comprobar que lo que se pide es equivalente a calcular lo que mide la altura de un triángulo equiláteros de 2cm. de lado:

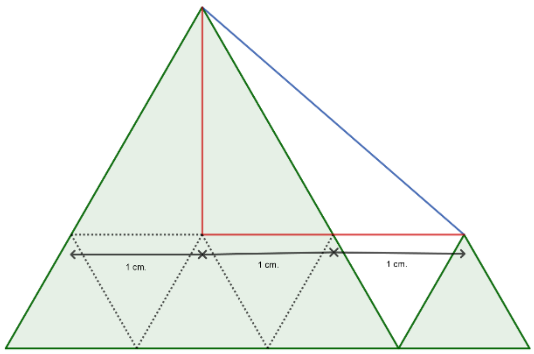




$$a^2+1^2=2^2 \Rightarrow a^2+1=4 \Rightarrow a^2=4-1 \Rightarrow a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3} \simeq 1'732cm$$

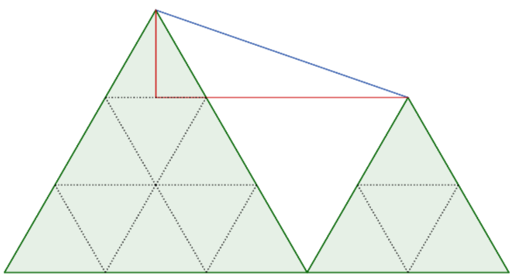
Para el apartado c) podemos proceder de otra forma.

Vamos a calcular la distancia pedida como la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide 2 cm. y el otro cateto es la atura de un triángulo equilátero de 2 cm. de lado y que, como ya hemos calculado, mide $\sqrt{3}$ cm.



$$d^2=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=4+3=7 \Rightarrow d=\sqrt{7}cm$$

o bien $d^2=2^2+1'732^2=4+3=7 \Rightarrow d=\sqrt{7} \simeq 2'646cm$



De igual manera, la medida del apartado b) sería la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide 2’5 cm. y otro mide lo mismo que la altura de un triángulo equilátero de 1 cm. de lado. Esta altura será la mitad de la altura del triángulo de 2 cm. de lado que ya hemos calculado antes:

$$d^2=2'5^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=6'25+\frac{3}{4}=7 \Rightarrow d=\sqrt{7}cm$$ o bien

$$d^2=2'5^2+\left(1'732:2\right)^2=6'25+0'866^2=6'25+0'75=7 \Rightarrow d=\sqrt{7} \simeq 2'646cm$$

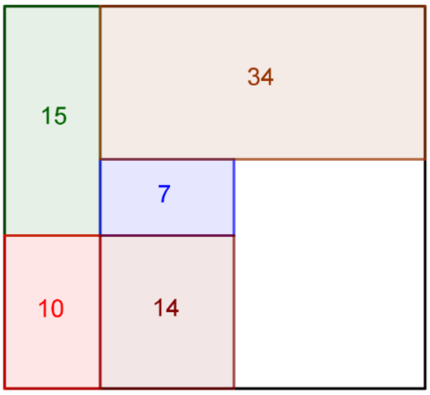
Kovalevskaya publicó sus primeros resultados con la versión masculina de su apellido (Kovalevsky). Sólo cuando quedó patente su gran capacidad y colegas del renombre de Mittagg-Leffler o Weierstrass reconocieron su valía, se permitió mostrar que era una mujer. Situación parecida le ocurrió a Sophie Germain que se carteaba con Lagrange y con Gauss con el nombre de Sr. Le Blanc, hasta que la insistencia de cada uno de ellos por conocerla, le hizo confesarles la verdad.

Ejercicio 4

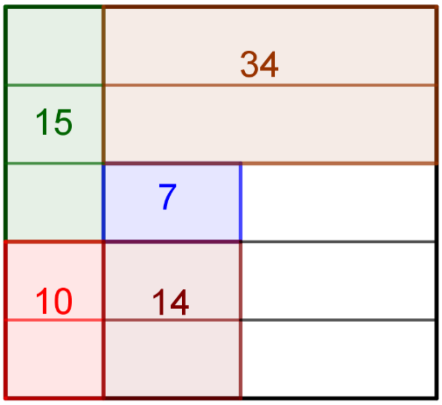
En la biblioteca de Sofía Kovalévskaya hay una librería rectangular dividida en seis baldas, tal y como indica la figura.

Conocemos el área de cinco de las baldas (según se indica en la imagen).

Calcula el área de la balda que queda sin sombrear.

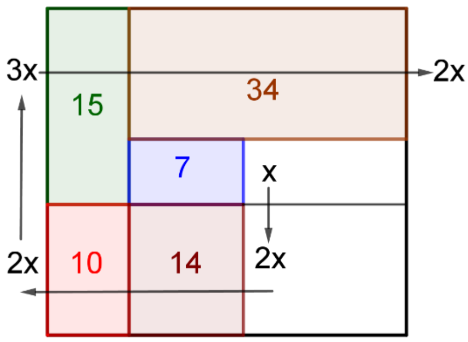


Respuesta



El rectángulo de área 14 tiene la misma base que el de área 7, así que su altura será el doble. Los rectángulos de áreas 15 y 10 tienen la misma base con lo que el mayor será las 3/2 partes del menor. Eso nos lleva a que el área buscada más 7 y más 14 será las 3/2 de 34, esto es 51. De manera que el área pedida es 51 – 7 – 14 = 30

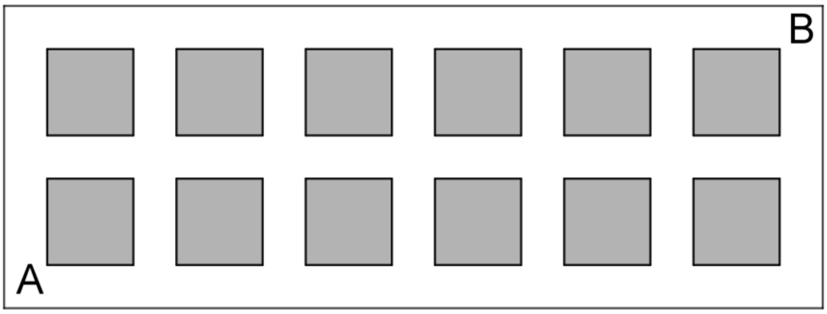
También podríamos haber razonado poniendo nombre (por ejemplo x) a la altura del rectángulo de área 7. Así podemos nombrar como $2x$, $2x$ y $3x$ las alturas de los siguientes rectángulos. Y como el rectángulo total tiene altura 5x, el de área 34 tendrá altura $2x$. Así, éste último rectángulo tiene la misma base y altura que el de 14 junto con el rectángulo blanco grande. Así que este rectángulo blanco tiene área 34 – 14 = 20 y el rectángulo blanco pequeño (de altura x) tendrá la mitad. El área pedida será 20 + 10 = 30.



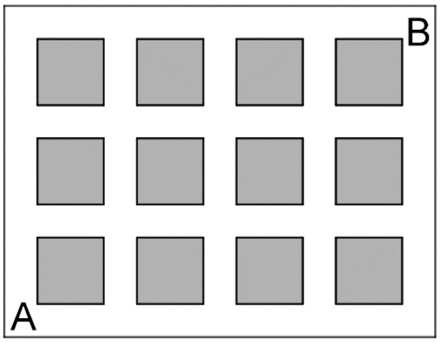
Emmy Noether se doctoró en la Universidad de Erlagen. En 1923 fue nombrada Catedrática de Álgebra en la Universidad de Gotinga, donde llevaba ya años impartiendo clases. Cuando en 1933, el gobierno nazi prohibió impartir clase a los profesores de ascendencia judía (como era el caso de Noether), aceptó un trabajo en el Bryn Mawr College de Pensilvania (Estados Unidos) y más tarde comenzó a dar clases en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

Ejercicio 5

Desde el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Gotinga (B) al apartamento de Emmy Noether (A) hay 3 calles horizontales y 7 calles verticales, tal y como indica el siguiente dibujo. Noether decide hacer cada día un recorrido distinto, sin retroceder nunca (sólo hacia arriba y hacia a la derecha, según el dibujo y nunca bajar o retroceder). ¿De cuántas formas distintas puede ir desde su casa a la Universidad?

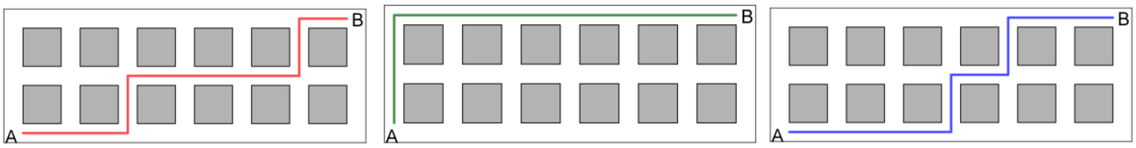


Durante su estancia en Princeton, Noether decidió continuar con el mismo pasatiempo. En esta ocasión, las calles entre su lugar de residencia (A) y el Instituto de Estudios Avanzados (B) eran 4 calles horizontales y 5 calles verticales, tal y como indica este otro dibujo. ¿De cuántas maneras distintas puede llegar, sin retroceder en ningún momento?



Respuesta

Para ir desde A hasta B (sin retroceder nunca) siempre hay que cubrir 8 tramos de la anchura de un edificio: 2 tramos en vertical y 6 en horizontal. Cada posible itinerario consiste en elegir en cuáles de los 8 tramos totales recorremos los 2 verticales (y los otros 6 serán horizontales)



Por ejemplo, el camino rojo consiste en los 8 tramos: HHVHHHVH y lo podríamos describir como “nos desplazamos en vertical en el tramo 3 y en el 7”. La ruta verde sería 1-2 y la azul 4-6

Habrá tantas rutas posibles como maneras de escoger dos números de entre los números de 1 al 8. Vamos a contarlas:

Si escogemos primero el 1, hay 7 posibilidades (2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8)
Si escogemos primero el 2, hay 6 posibilidades (3, 4, 5, 6, 7, y 8) ya que la pareja 2–1 ya la hemos contado.
Así, las posibilidades distintas serán 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 +1 = 28

También podíamos haber razonado de esta otra manera: si combinamos cada uno de los 8 números con cada uno de los 7 restantes encontramos 56 posibilidades, pero hemos contado cada una dos veces (por ejemplo 3–5 y 5–3) así que las válidas son la mitad: 28

Para el segundo apartado, podemos razonar igual. Ahora cada itinerario consistirá en 4 tramos horizontales y 3 tramos verticales. Así que debemos contar las maneras de escoger 3 números de entre un total de 7:

Empezando con 1 y 2 habría 5 posibilidades (3, 4, 5, 6 y 7)
Empezando con 1 y 3 habría 4; con 1 y 4 habría 3 y así sucesivamente hasta concluir que empezando con 1 habría 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15
Igualmente, empezando con 2 habría 4 + 3 + 2 + 1 = 10
Empezando con 3 habría 3 + 2 + 1 = 6; Empezando con 4 serían 2 + 1= 3; finalmente, empezando con 5 sólo habría 1 posibilidad (5-6-7)
En total habría 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35

También, como antes, podríamos haber contado todos los tríos posibles de números (cada uno de los 7 números combinado con cada uno de los 6 restantes y con cada uno de los 5 que quedan) que son 7.6.5 = 210. Pero cada trío lo hemos contado 6 veces: por ejemplo 1-2-3, 1-3-2, 2-1-3, 2-3-1, 3-1-2 y 3-2-1. Así que la cuenta total es 210:6 = 35