



SOCIEDAD MATEMÁTICA
DE PROFESORES
DE CANTABRIA

Fomentar los procesos matemáticos a través de *Thinking Classrooms*

14-15/02/2025, Santander

Daniel Ruiz Aguilera
@druizaguilera
Universitat de les Illes Balears

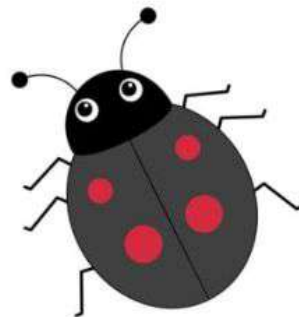
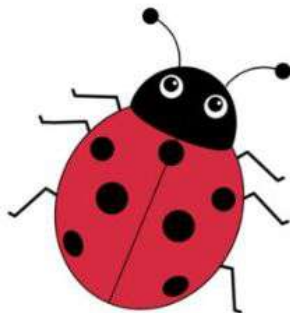
¿Qué trabajaremos?

Un problema (14/02)



Ladybirds in the Garden

In Sam and Jill's garden there are two types of ladybirds. There are red Seven-Spot ladybirds with 7 black spots and black Four-Spot ladybirds with 4 red spots.

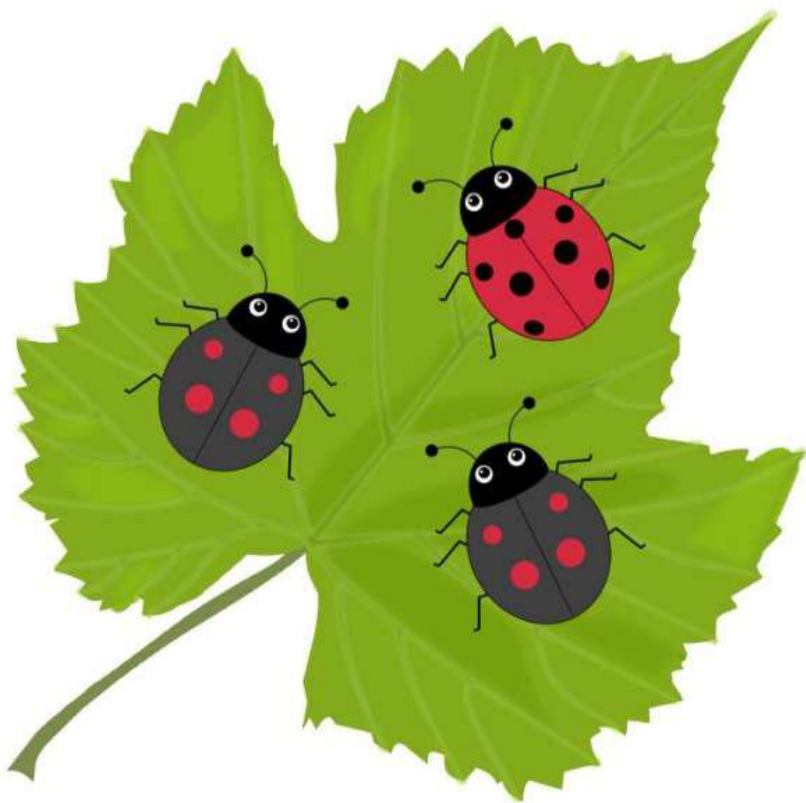




Mateo y Lucía ven tres mariquitas

“Una mariquita con 7 puntos y dos con 4 puntos”, dice Mateo.

“Eso son 15 puntos en total” dice Lucía.



“Me gustaría saber qué otros números de puntos se podrían ver con otras mariquitas. Sé cómo serían 16 puntos”, dice Mateo.

“Y 14 también es fácil” dice Lucía.



¿Cómo conseguirías 16 y 14 puntos con las mariquitas de 7 y 4 puntos?

¿Qué otros números pueden hacerse sumando 4s y 7s?

¿Qué números puedes hacer de 4 a 50?

¿Hay números que no puedas hacer?
¿Cuáles?



¡Momento de poner en orden las ideas!

Hemos de realizar un informe en el que
seamos capaces de explicar la
resolución de nuestro problema

(a nivel individual)

Un problema (15/02)

Me podéis decir números que sumen 25?

Y después los multiplicamos...

¿Podemos encontrar una multiplicación mayor?

Extensiones y variaciones

- ¿Si sólo son dos números? ¿Y si son tres?
- ¿Y si en lugar de 25 es 12? ¿13? ¿14?...
- ¿Si los números son naturales?
- ¿Si los números son racionales?
- ¿Si el número de sumas no es entero?
- ...

¿Cuál es “la” solución (en naturales)?

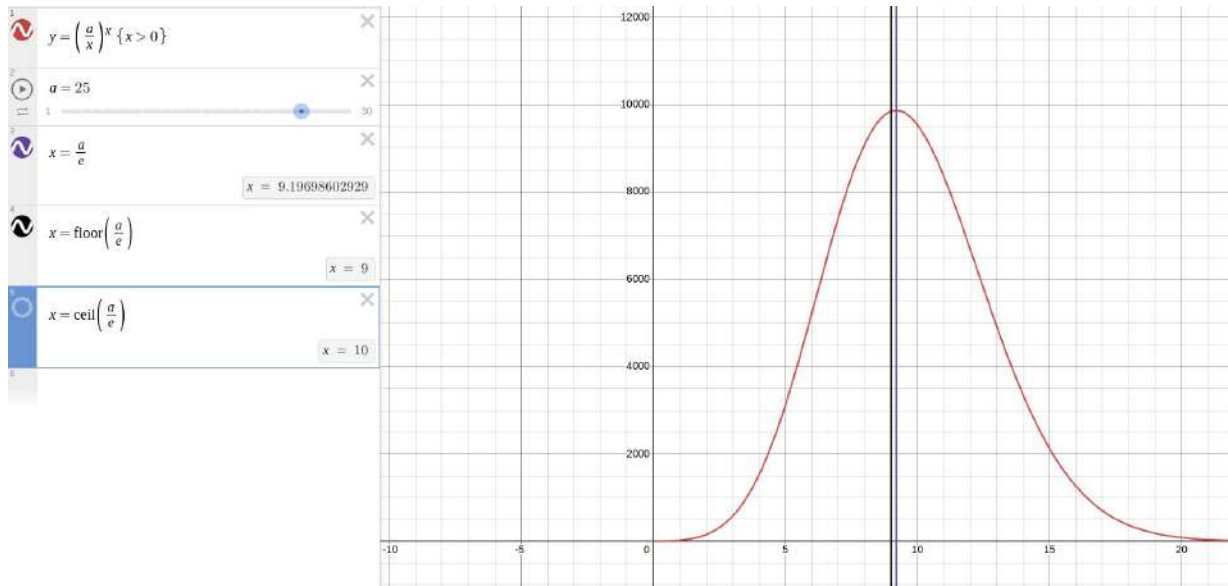
- Para dos números: $12 * 13 = 156$
- Para tres números: $8^2 * 9 = 576$
- Para cuatro números: $6^3 * 7 = 1512$
- Per a cualesquiera: $3^7 * 2^2 = 8748$

¿Cuál es “la” solución (en racionales)?

- Para dos números: $12,5 * 12,5 = 156$
- Para tres números: $(25/3)^3 = 578,70...$
- Para cuatro números: $(25/4)^4 = 1525,879...$
- Para cualesquiera: $(25/9)^9 = 9846,40...$

¿Cuál es “la” solución?

<https://www.desmos.com/calculator/ce4pwis43p>



Otro problema

Beat the Tax Collector

HOW TO PLAY

- Start with a collection of paychecks, from \$1 to \$12.
- You can choose any paycheck to keep.
- Once you choose, the tax collector gets all paychecks remaining that are factors of the number you chose.
- *The tax collector must receive payment after every move.*
- If you have no moves that give the tax collector a paycheck, then the game is over and the tax collector gets all the remaining paychecks.

<https://mathforlove.com/wp-content/uploads/2023/02/Beat-the-Tax-Collector.pdf>

Problema

- ¿Puedes llevarte más dinero que el recaudador de impuestos?
- ¿Cuál es el máximo? ¿Por qué?
- ¿Y si en lugar de $\{1 \text{ €}, \dots, 12 \text{ €}\}$ fuesen $\{1 \text{ €}, \dots, 16 \text{ €}\}$?
- ¿Qué número será el primero que elegirás? ¿Por qué?
- Intenta resolverlo para conjuntos $\{1 \text{ €}, \dots, n \text{ €}\}$ para n diferentes...
¿qué observas?

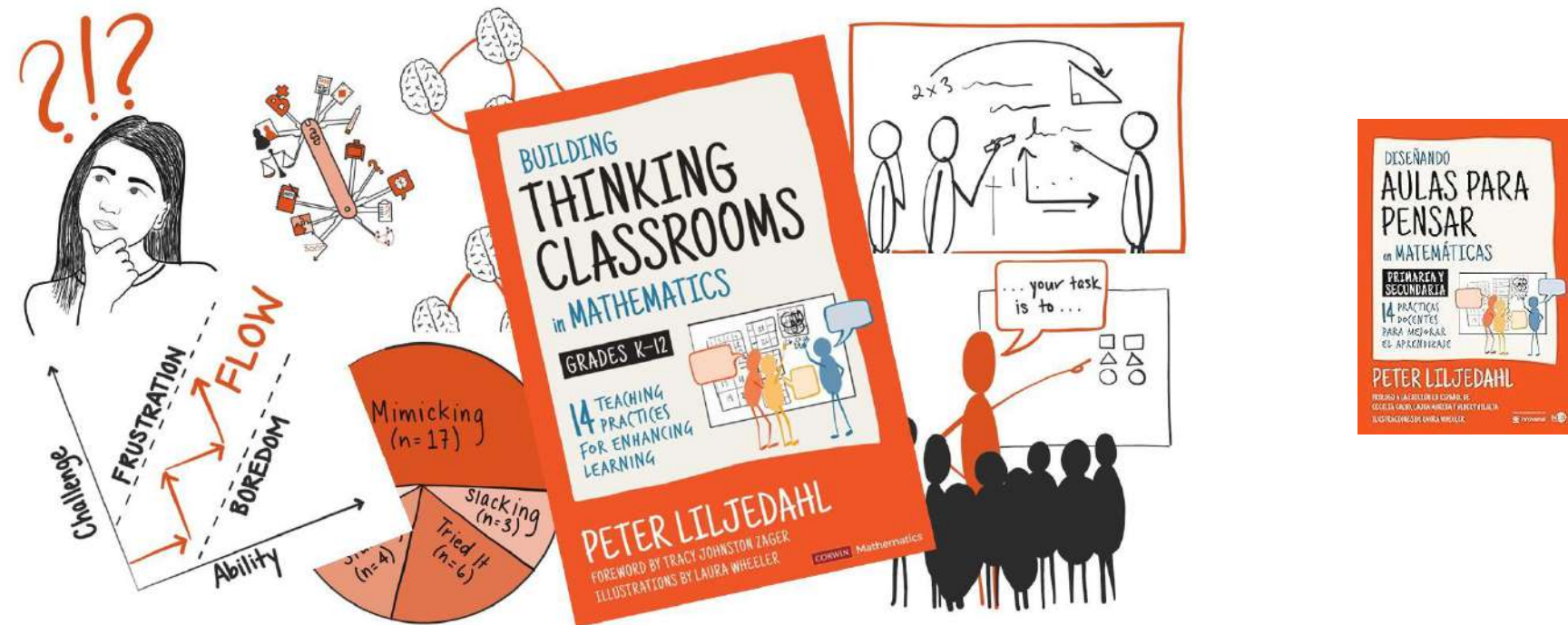
Soluciones para conjuntos $\{1, \dots, n\}$

n	máximo beneficio	n	máximo beneficio	n	máximo beneficio
1	0	7	17	13	52
2	2	8	21	14	66
3	3	9	30	15	81
4	7	10	40	16	89
5	9	11	44	17	93
6	15	12	50	18	111

Fuente: <https://oeis.org/A019312/list>

Análisis

Building Thinking Classrooms, de *Peter Liljedahl*



<https://buildingthinkingclassrooms.com/>

BUILDING THINKING CLASSROOMS

Research: @pgliljedahl
 SKETCHNOTE: @wheeler_laura

① Begin w/ a Problem

Give a problem-solving task

To start:

- Problems should be
 - ☐ engaging
 - ☐ non-curricular
 - ☐ collaborative
- ↳ promote talking

Later:

- Problems can be curricular
- eg textbook problems

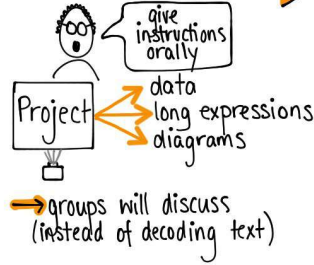
② Visibly Random Groups

- ☐ Randomly assigned
eg playing cards
- ☐ Daily & in front of students
- ☐ 2 or 3 students / group
- 
- ☐ Sit & stand together

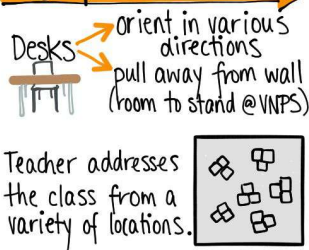
③ Vertical NonPermanent Surfaces

- ☐ Vertical
- ☐ Erasable
-  WHITEBOARD
-  CHALKBOARD
-  WINDOW
- ☐ 1 marker or chalk per group
- ↳ promotes discussion

④ Oral Instructions



⑤ Defront the room



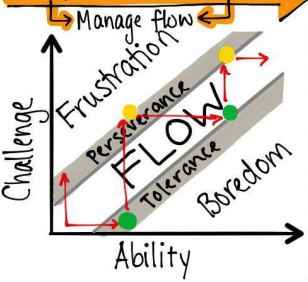
⑥ Answering Questions

- Acknowledge, but don't answer:
- ☒ Proximity questions (b/c teacher is close by)
- ☒ Stop thinking questions
- Answer:
 - ☒ Keep thinking questions
 - ↳ give HINTS not answers

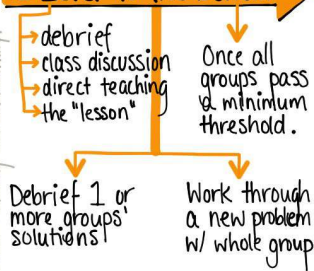
⑦ Build Autonomy

- ☐ Model how groups can visit other groups when they are stuck or done.
- ☐ Hints & extensions come from peers (not just the teacher).
- ↳ Helps manage flow

⑧ Hints & Extensions



⑨ Level to the Bottom



⑩ Student Notes

- Student created:
 - select
 - synthesize
 - reorganize
- ideas
- Provide time for this after levelling.

⑪ Assessment

- Process > Product
- Group work + Individual work
- Student learning
 - Where are they?
 - Where are they going?

① Begin w/ a Problem

Give a problem-solving task

To start:

Problems should be

- ☐ engaging
- ☐ not-curricular
- ☐ collaborative
- ↳ promote talking

Later:

Problems can
be curricular
eg textbook
problems

② Visibly Random Groups

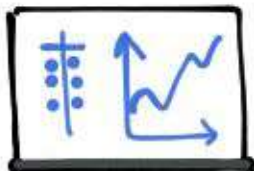
- ☐ Randomly assigned
eg playing cards
- ☐ Daily & in front of students
- ☐ 2 or 3 students / group



- ☐ Sit & stand together

③ Vertical NonPermanent Surfaces

- ☐ Vertical
- ☐ Erasable



WHITEBOARD



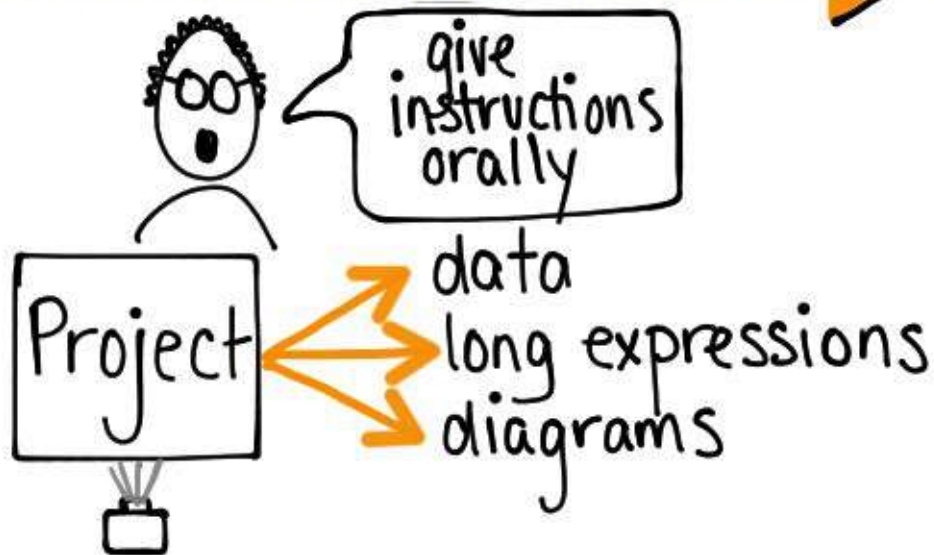
CHALKBOARD



WINDOW

- ☐ 1 marker or chalk per group
↳ promotes discussion

④ Oral Instructions



→ groups will discuss
(instead of decoding text)

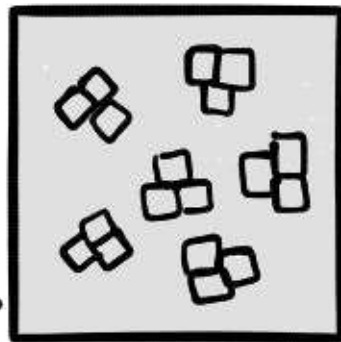
⑤ Defront the room

Desks



orient in various directions
pull away from wall
(room to stand @VNPS)

Teacher addresses
the class from a
variety of locations.



⑥ Answering Questions

Acknowledge, but don't answer:

✗ Proximity questions
(b/c teacher is close by)

✗ Stop thinking questions

Answer:



✓ Keep thinking questions
↳ give HINTS not answers

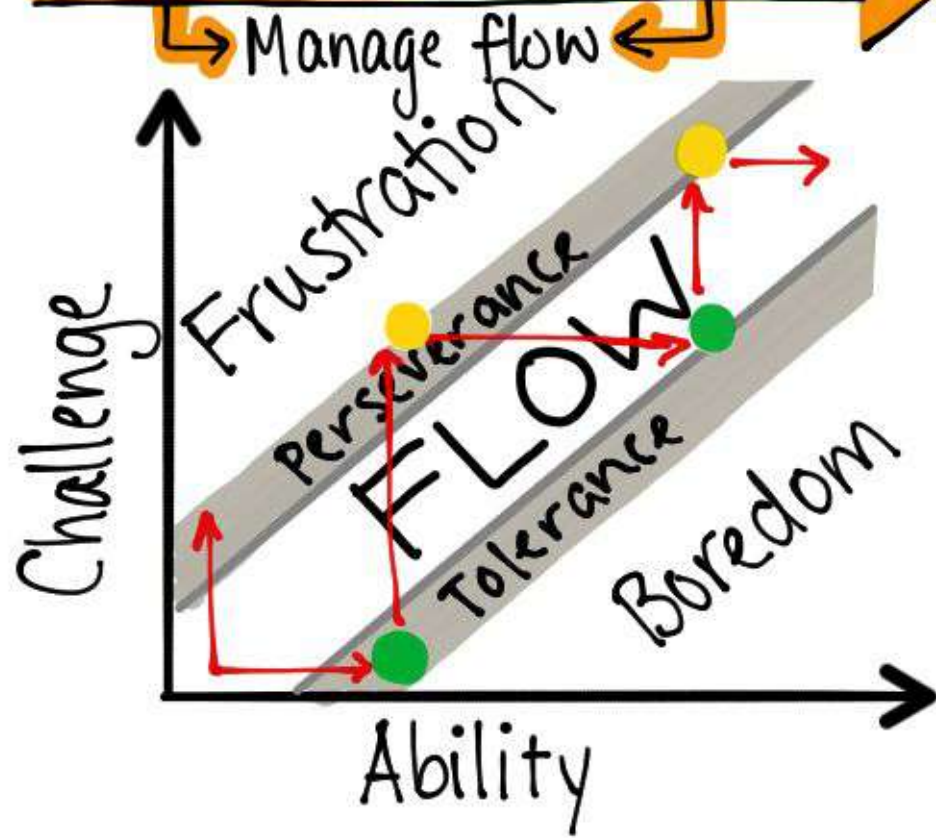
➤ ⑦ Build Autonomy

- ☐ Model how groups can visit other groups when they are stuck or done.
- ☐ Hints & extensions come from peers (not just the teacher).

➡ Helps manage flow



⑧ Hints & Extensions



FLOW → Mihaly Csikszentmihalyi

⑨ Level to the Bottom

- debrief
- class discussion
- direct teaching
- the "lesson"

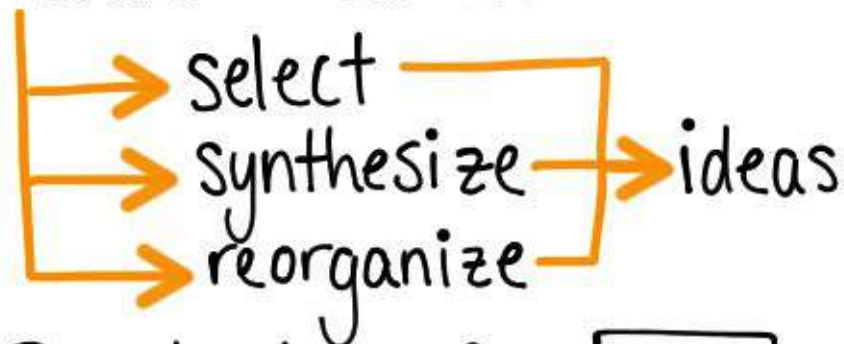
Once all groups pass a minimum threshold.

Debrief 1 or more groups' solutions

Work through a new problem w/ whole group

@Student Notes

Student created:



Provide time for
this after levelling.



② Assessment

THINKING
&
LEARNING

Process > Product

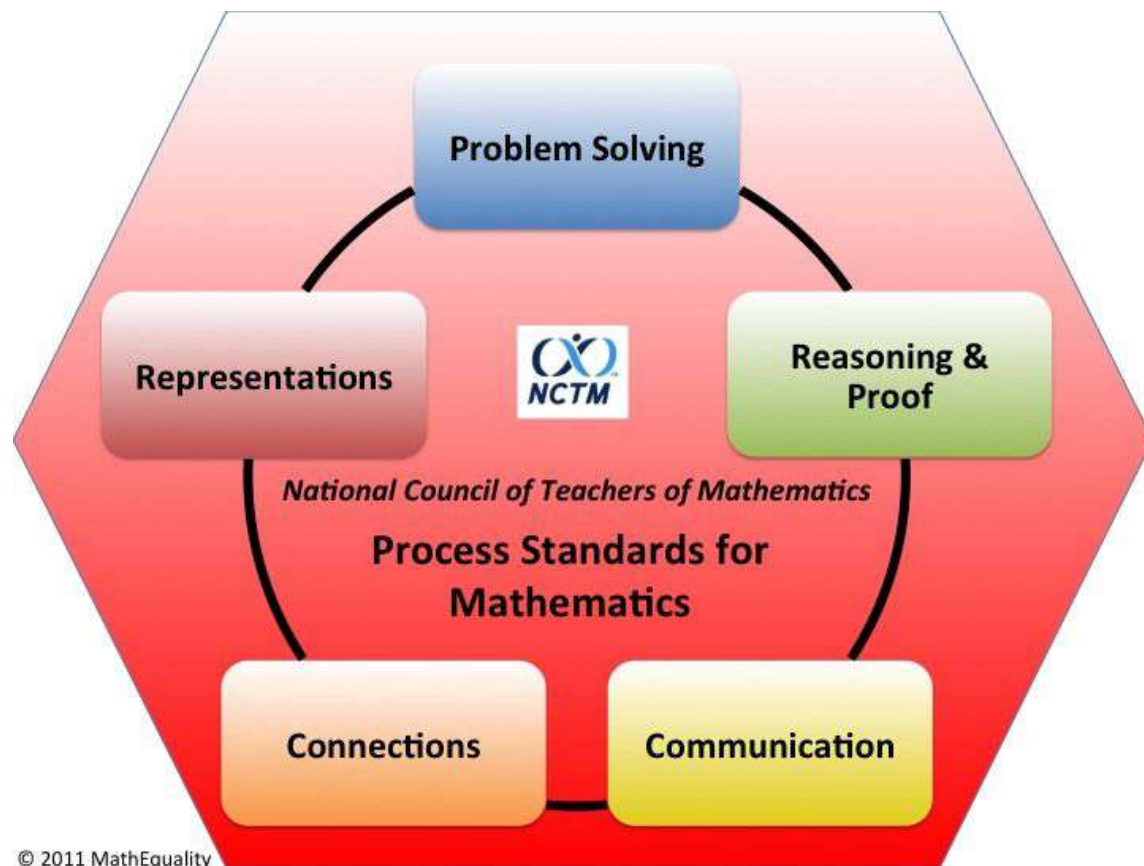
Group work + Individual work

Student learning  Where are they?
Where are they going?

Prácticas en Building Thinking Classrooms

1. Trabajar en grupos de tres visiblemente aleatorios con pizarras verticales borrables.
2. Redistribuir los espacios en el aula para dispersar los grupos por todo el aula.
3. Proponer verbalmente actividades matemáticas de suelo bajo y techo alto que fomenten el razonamiento y la participación de todo el alumnado.
4. Consolidar el aprendizaje mediante resumen y práctica voluntaria.
5. Fomentar una interacción profesor-alumnado y alumnado-alumnado que ayude a continuar pensando.
6. Evaluación formadora y formativa.

¿Qué procesos hemos trabajado?

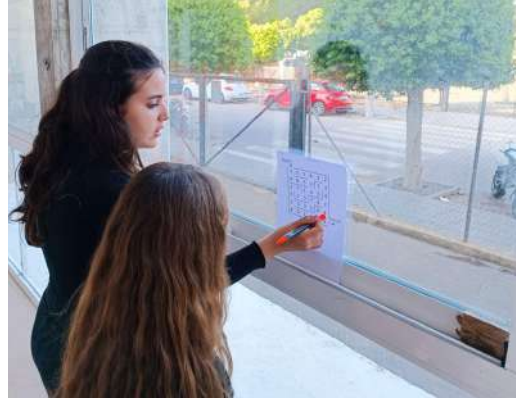


- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
 - La tarea representa un reto pero tienen herramientas
- RAZONAMIENTO Y PRUEBA
 - Aparecen conjeturas, intentan demostrar, comprueban...
- REPRESENTACIÓN
 - Cuando escriben en la pizarra y haciendo el informe
- COMUNICACION
 - Escrita: en el informe, verbal: para resolver el problema en grupo
- CONEXIONES
 - Con la tipología de problemas se buscan estas conexiones

Grado de Educación Primaria



1º ESO



1º bachillerato



Grado de Matemáticas

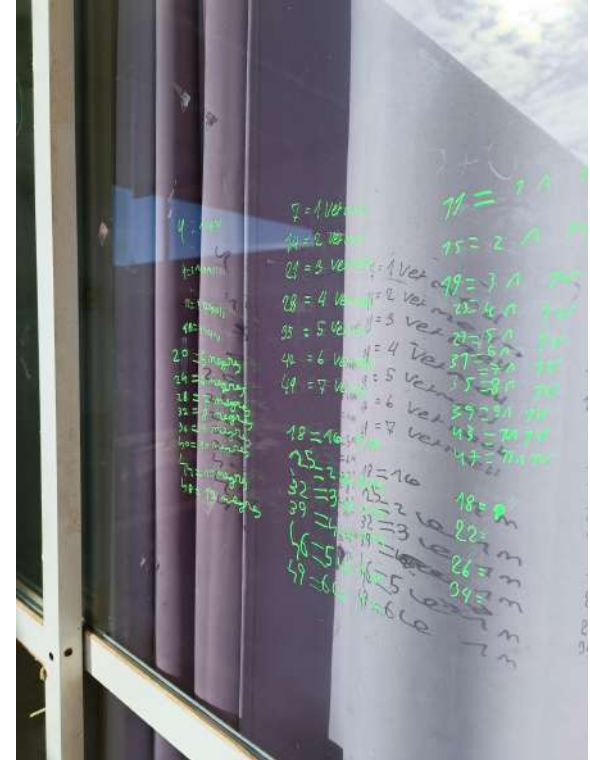
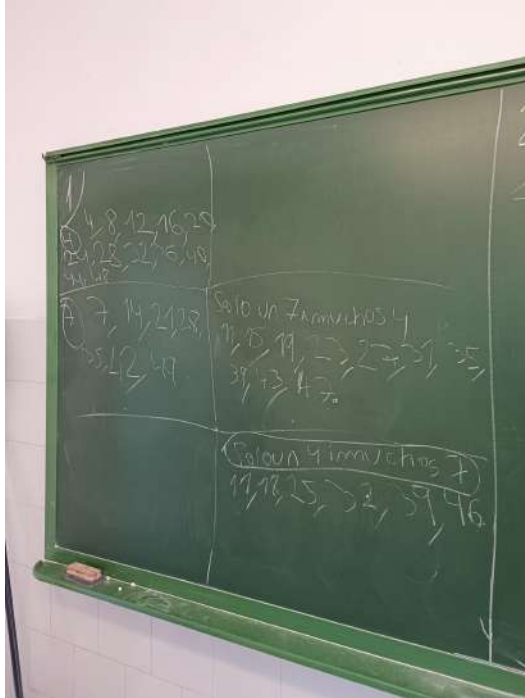


Formación de Maestros





El problema de las mariquitas en 1º ESO

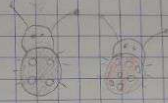




El problema de las mariquitas en 1º ESO

6/10/23

Una negra = 4
Una vermella = 7
Dues negres = 8
Tres negres = 12
Dues vermelles = 14
Cinc negres = 20
Tres vermelles = 21



PROBLEMA

Nosaltres a l'aula de matemàtiques hem fet un problema de marietes. Es sabia que hi havia 2 marietes una era vermella i l'altra negra. La negra tenia 4 punts i la vermella 7 punts. El que havíem que fer era aconseguir tots els nombres possibles més petits que 50. Nosaltres hem trobat tots els nombres de la marieta de color negre i vermell.

Les marietes

Nosaltres varem fer del 1 al 50 quins nombres es poden fer amb el nombre 7 i 4 es poden sumar multiplicar per fer nombres per exemple.

Negre

4, 8, 12, 16, 20
24, 28, 32, 36
40, 44, 48.

Vermell

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49
Aquests són els nombres que poden fer amb el 7 fins al 50.

Aquests són els nombres del 4 al 50 que es poden fer amb el nombre 4.

També es poden sumar el 7 i 4

Dintres de l'octubre =

$$\begin{aligned}7+4 &= 11 \\4+4 &= 8 \\7+7 &= 14 \\7+7+7 &= 28 \\4+4+4+4+4 &= 20\end{aligned}$$

$$4 \times 4 = 16$$

~~4x4x4~~

Varem poder molts nombres i havia en varem fer de nombres molt grans.



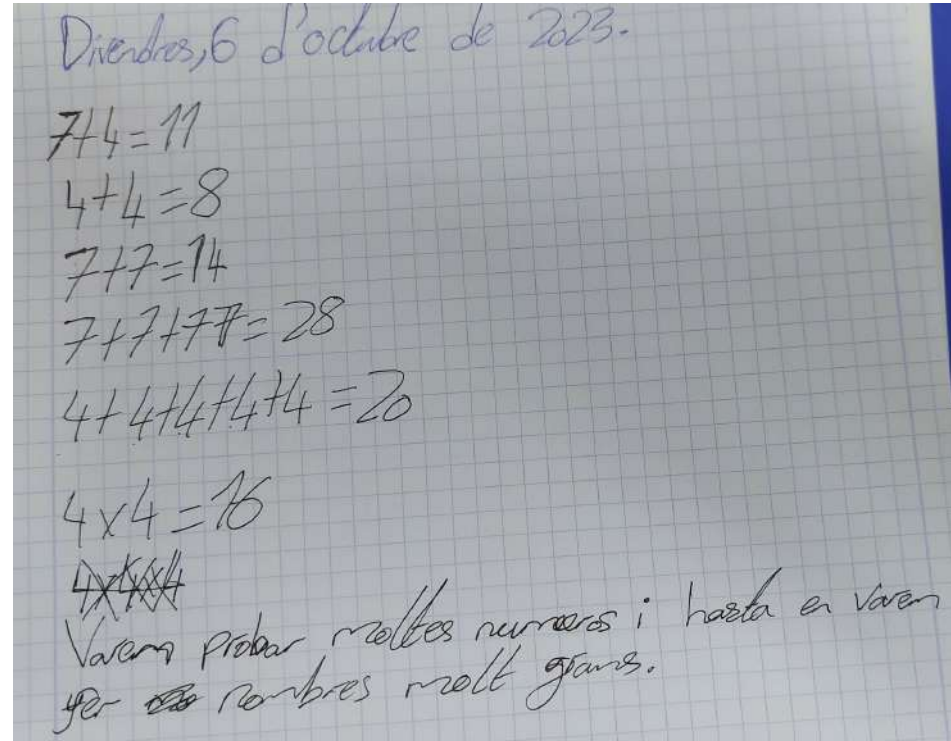
El problema de las mariquitas en 1º ESO

Evaluación inicial:

- Desconocimiento de la relación entre **suma reiterada** con la **multiplicación**

Actuación:

- Repaso de las tablas
- Trabajo específico de la relación





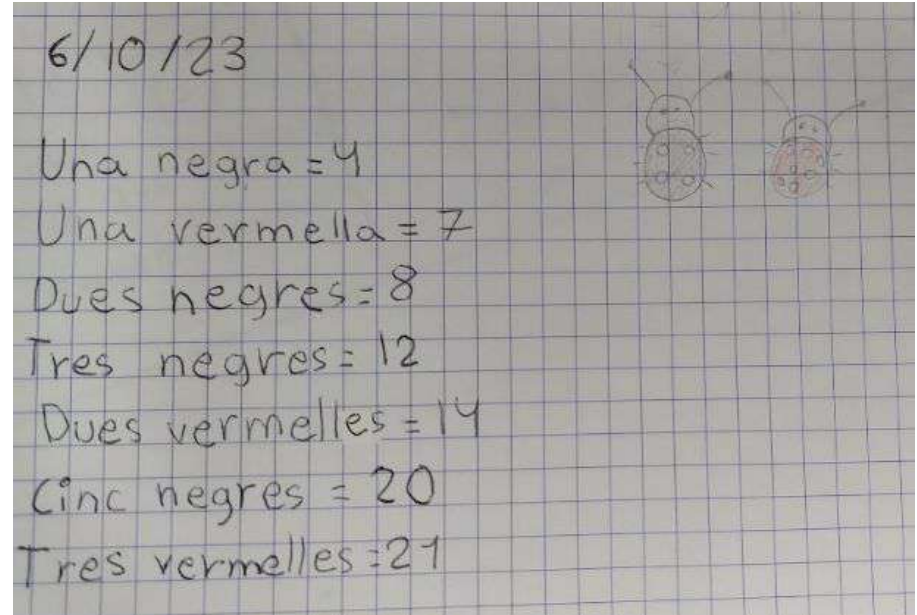
El problema de las mariquitas en 1º ESO

Evaluación inicial:

- Problemas con la **comunicación** y **representación**

Actuación:

- Ofrecer técnicas de representación (tablas, esquemas, orden...)

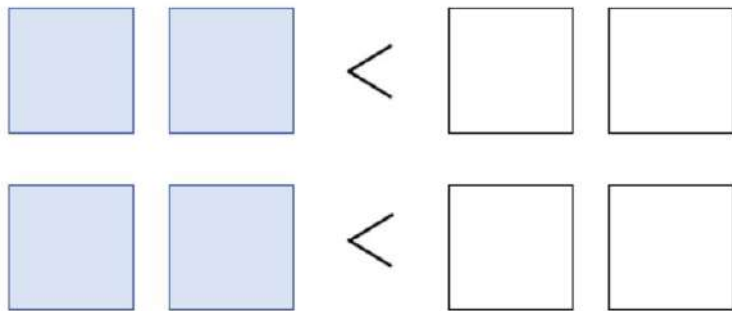


PROBLEMAS TRABAJADOS (1º ESO)

1. Suma 25 y producto máximo
2. [Mariquitas](#)
3. [La camiseta de Xavi](#)
4. [Laberinto de 100](#)
5. Triángulos en el geoplano 3x3
6. Pintando el cubo
7. [Menos és más](#)

El final del curso

Menos es más



5, 6, 7, 6, 2, 8, 6, 0

El meu grup i jo pensam que el nombre més gran que es pot fer és 126 perquè els $\boxed{6} \boxed{5} < \boxed{8} \boxed{0}$ ~~per~~ el 80 sempre

$\boxed{6} \boxed{7} < \boxed{6} \boxed{2}$

eura d'estat a la taula major però que no es pot fer ningun nombre més gran que el 80, 81, 82, 85 o 86 i per poder emprar més nombres a la graella auríem de triar 80. Així es com nosaltres pensam que és ra el nombre més gran.

Si el nombre més petit que es pot fer és 12 però no l'auríem d'emplenar perquè és el més petit i en tauríem de demanar el més gran.

Passes en general $\boxed{8} \boxed{5} < \boxed{9} \boxed{0}$

~~5, 6, 3, 9, 8, 0, 4, 1~~ $\boxed{6} \boxed{4} < \boxed{7} \boxed{3}$

→ 1. Primer es d'agafar els nombres més grans i posar el més gran a la dreta i a l'esquerra el més petit.

→ 2. Al segon pas dels nombres que el queden posar a la dreta el més gran i a l'esquerra l'altre.

→ 3. Sumes als nombres de l'esquerra i el resultat que surti és la gran que es.

→ 4. Quan ja ho es sumat el resultat en aquest cas es 949 el més

PROBLEMA

Nosaltres a les matemàtiques hem fet un problema de monedes. Es sabia que hi havia 2 monedes una era vermella i l'altra negra. La negra tenia 4 punts i la vermella 7 punts. El que havíem que fer era aconseguir tots els nombres possibles més petits que 50. Nosaltres hem trobat tots els nombres de la moneda de color negre i vermell.

LESS IS MORE

$$\begin{array}{r}
 5, 6, 1, 6, 2, 8, 6, 0 \\
 \boxed{6} \boxed{5} < \boxed{8} \boxed{0} \\
 + \\
 \boxed{6} \boxed{1} < \boxed{6} \boxed{2} \\
 \hline
 126
 \end{array}$$

És el més gran perquè hauríem de tenir un altre número més gran que 6 per poder fer:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{6} \boxed{5} < \boxed{8} \boxed{0} \\
 + \\
 \boxed{6} \boxed{6} < \boxed{7} \boxed{2} \\
 \hline
 131
 \end{array}$$

Per fer això hauríem de canviar el 1 per 7.

Simó Big
ArE

PASSES EN GENERAL

1. 5, 6, 3, 9, 8, 0, 4, 7

$$\begin{array}{r}
 \boxed{5} \boxed{6} < \boxed{9} \boxed{8} \\
 \boxed{5} \boxed{9} < \boxed{7} \boxed{3}
 \end{array}$$

1. El primer que faríem seria mirar quins són els més grans i ~~després~~ els posaríem a l'últim ~~lloc~~ ^{lloc} després per veure quins ~~podem~~ ^{podem} fer per tenir el més gran possible.

3. Després ^{començaria a col·locar} posaria el ~~rest~~ ^{les unitats} des del 0 al 5.

Però hi ha una excepció que hauríem de no pot fer perquè ~~podem~~ ^{podem} si tenim 2 dígits iguals no es pot fer.

Comparativa:
inicio y final

Les marietes

Nosaltres varem fer del 1 al 50
quins numeros es poden fer amb el
numero 7 i 4 es poden sumar multi-
plicar per per numeros per exemple.

Negre

4, 8, 12, 16, 20

24, 28, 32, 36

40, 44, 48.

Aquests son els
numeros del 4
al 50 que es poden
fer amb el numero
4.

Vermell

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49

Aquests son els numeros
que poden fer amb el
7 fins al 50.

Tambe es poden
Sumar el 7 + 4

Comparativa: inicio y final

Maria Delgado Comino 1r E

31-05-2024

5, 6, 7, 6, 2, 8, 6, 0

El meu grup i jo fems que el nombre
mes gran que es pot fer es 126 perque
els $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ ~~per~~ el 80 sempre
 $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

enlla d'estat a la taula major per que no
es pot fer ningun numero mes gran que el
80, 87, 82, 85 o 86 i per poder empleat
mes numeros a la graella enriem de posar 80
Aixi es com nosaltres fems que es fa el nombre
mes gran.

Si el nombre mes petit que es pot fer es 12
pero no l'enriem d'empleat perque es el mes
petit i en dahi chi ha demanat el mes
gran.

Poses en general

$\begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

~~per~~ 5, 6, 3, 9, 8, 0, 4, 7

$\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$

→ 1. primer es d'agafar els nombres mes gran i posar
el mes gran a la dreta i a l'esquerra el mes petit.

→ 2. Al segon pas dels numeros que el queden fets afa d'ida el mes
gran i a l'esquerra l'altre.

→ 3. sumes als nombres de l'esquerra i el resultat que
surti es lo gran que es.

→ 4. com ja ho es sumat el resultat en aquest cas es 449 el mes gran

Avaluació Building Thinking Classroom

Aquest qüestionari és totalment anònim i té per objectiu conèixer la vostra avaluació d'alguns aspectes clau de la metodologia Building Thinking Classroom que hem seguit a les classes de grup mitjà. T'agraïm que li dediquis uns minuts.

* Indica que la pregunta és obligatòria

Valora el treball en grups aleatoris i la interacció amb diferents companys durant les classes pràctiques des de la perspectiva del teu aprenentatge *

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Dificulta el meu
aprenentatge

☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Potencia el meu
aprenentatge

Justifica breument la teva valoració, indicant aspectes que valores positivament o aspectes a millorar del treball en grups aleatoris *

.....

Quin tipus d'organització social prefereixes durant les classes de grup mitjà? *

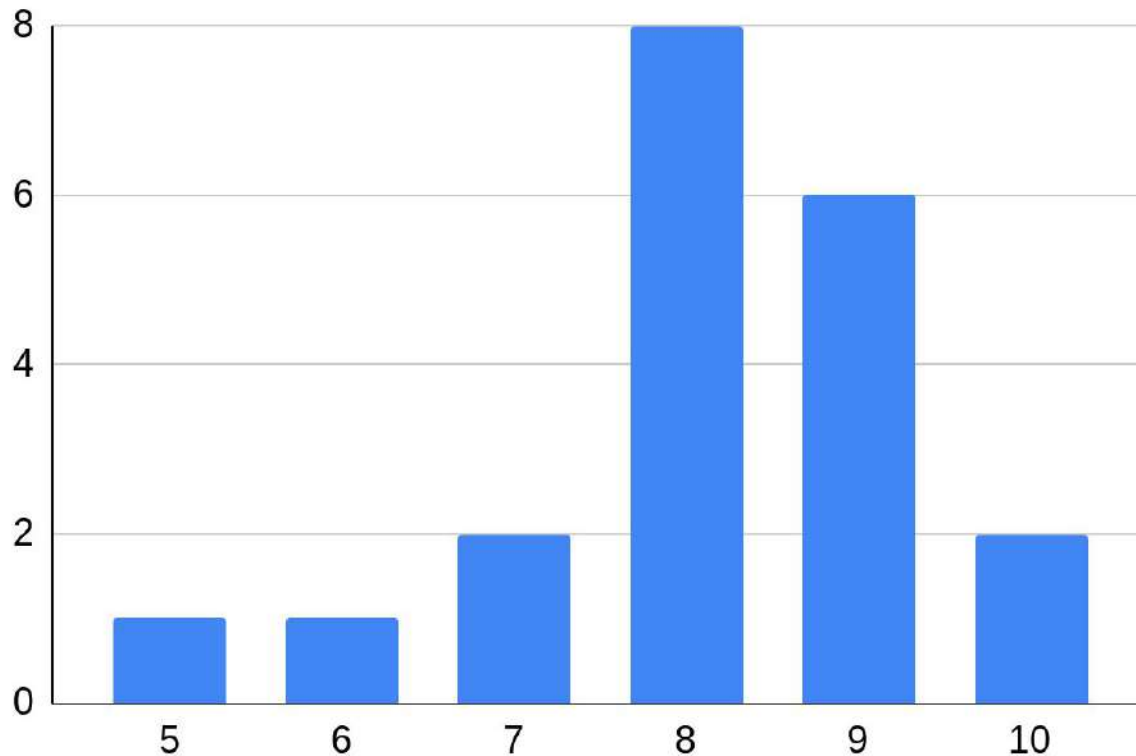
☐

Treballar en grups estables

☐

Treballar en grups aleatoris

Valora el trabajo en grupos aleatorios y la interacción con diferentes compañeros durante las clases prácticas desde la perspectiva de tu aprendizaje



“Creo que comparar la perspectiva propia de un problema con las de tus compañeros es muy enriquecedor. Te ayuda a ver posibles soluciones que no te habías planteado a diferentes métodos para llegar a la misma conclusión.”

“Creo que fomentar la cooperación y la toma de decisiones grupales, pero a veces se dificulta el trabajo más mecánico.”

Conclusiones

Conclusiones

- Se puede utilizar como evaluación inicial
- No es necesario hacer todas las sesiones así
- Se puede usar la metodología en todos los niveles
- Seguir esta metodología desarrolla todos los procesos
- Se observa un cambio significativo en el trabajo del alumnado