Introducción:

La orden de los monjes *demostratenses* es una fantástica orden de monjes contemplativos que gustan del estudio de las matemáticas y disfrutan al resolver los problemas que continuamente se plantean. Su mundo, aunque parece limitado a los muros del monasterio, es, sin embargo, infinito, porque viajan con la imaginación a otros mundos llenos de sorprendentes conceptos y relaciones.

Este relato es el de un día en la vida del monasterio. En él encontrarás preguntas y ejercicios que esperamos que te resulten interesantes y que intentes resolver.

1.-Laudes (antes del amanecer)

El hermano Guillermo había paseado muchas veces por aquel patio. En el centro del mismo, un estanque en forma circular estaba inscrito en un cuadrado. Cuatro triángulos isósceles de césped en las esquinas daban frescura al entorno. La noche había sido fría y el estanque estaba helado. Pero no era totalmente liso, una marca en el hielo llamó su atención. Una pelota había caído en él, cuando el agua era líquida aún. Otro monje había recogido la pelota del hielo, pero la huella seguía ahí. Fray Berengario, que pasaba por allí, midió la huella: -“24 cm. de diámetro y 8 de máxima profundidad”- dijo.

“Es suficiente” –añadió fray Guillermo- “Con esto sabré el radio de la pelota “

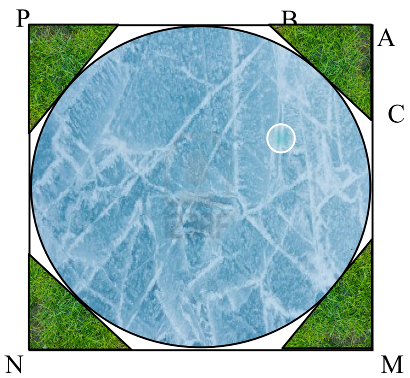
1 a)¿Podrías averiguarlo tú?

El hermano Guillermo observó de nuevo el estanque. Se preguntaba por la superficie del mismo y los datos necesarios para calcularla. El hermano Berengario, le comentó:

-“Yo sé, porque los he tenido que plantar, que los cuatro triángulos de césped tienen, en total, un área de 36 m2”-.

-“Es suficiente”- dijo fray Guillermo-

1 b) ¿Con este dato podrías calcular el área del estanque circular?



2.-Hora Prima.

El hermano Guillermo se encontraba en el refectorio a la hora prima (las 7 de la mañana) con el resto de los monjes, al lado del padre abad, como correspondía a su edad. Los monjes solían comer alimentos sencillos, pero muy naturales. Provenían de sus huertas y de las granjas que atendían siguiendo la máxima de la regla "cogitat et labora" (piensa y trabaja).

El abad bendijo diciendo: "bendice Señor a las 333 ovejas que han hecho posible este queso que vamos a tomar y a este pan con el que nos regalas, amén".

Los monjes comieron el queso poco a poco, incluso algunos de ellos entornaban los ojos para disfrutar más de su extraordinario sabor.

Al final de la comida fray Guillermo se dirigió al abad:

"Padre abad. Todos hemos apreciado cómo ha mejorado la calidad de nuestro queso. ¿Cuál es la razón de que sea tan excelente?"

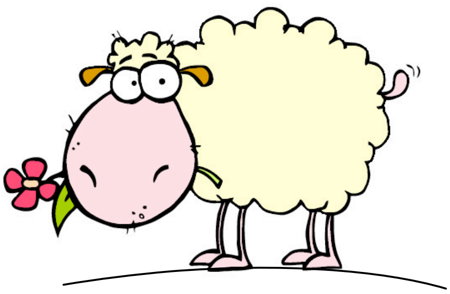
"Mire, fray Guillermo"- respondió el abad – "Como he dicho antes, este queso está producido por 333 ovejas, pero entre ellas hay tres grupos distintos, las del primero que se alimentan solo con heno, las del segundo, que comen solo alfalfa, y las del tercero son alimentadas con tomillos. Al principio el número de ovejas del primer grupo era el triple que las del segundo, y las del segundo doble que las del tercero".-

Fray Guillermo hizo un cálculo mental y descubrió cuántas eran las ovejas de cada grupo.

2 a) ¿Puedes calcularlo tú?

Pero el abad prosiguió diciendo: - "Pero, el queso, aunque no malo, era mejorable. Así que fuimos pasando ovejas del primer grupo al segundo y al tercero, de forma que en la actualidad todos tienen un número de ovejas capicúa, de tres cifras y distinto. Y ahora es el primer grupo el menos numeroso, y el tercero el mayor"-

2 b) ¿Cuántas ovejas pasaron del primero al segundo y del primero al tercer grupo?



3.- Hora Sexta (mediodía)

Algunos monjes *demostratenses* habían ocupado la hora tercia en los trabajos agrícolas, otros, los más dotados para ello, en los trabajos intelectuales. En esta orden, los trabajos intelectuales consistían en inventarse y plantearse unos a otros problemas de aritmética, álgebra, geometría, lógica,…. Era la hora más divertida del día. Fray Malaquias, encargado de recordar a los hermanos el santoral en el capítulo, tenía especial empatía por problemas numéricos relacionados con la fecha de cada día. Respecto de la fecha de hoy, fray Malaquías habría dicho en el capítulo:

-"Hermanos hoy es 4 de mayo de 2013. Día de los santos Florián, Ciríaco, Curcódomo, Antonina, Pelagia, Silvano y 39 mártires más y los beatos Ladislao, Silvano, Carlos, Ceferino y Juan Martín."- Repasaría brevemente obras y milagros de cada uno de ellos y terminaría diciendo:

-"Que ellos os iluminen para resolver las siguientes cuestiones:"

Y estas son las cuestiones de Fray Malaquías. Anímate a resolverlas:

En la sucesión 4-5-5-6-6-6-7-7-7-7-8-8-8-8-8-9-9…

3 a). ¿Cuántas veces aparecerá el número 2013?

3 b) ¿Qué lugares ocupa el 2013 dentro de la sucesión?

3 c) ¿Qué número ocupa el lugar 2013?

Del número $4 \cdot 5^{2013}$:

3 d) ¿Cuántos divisores tiene?

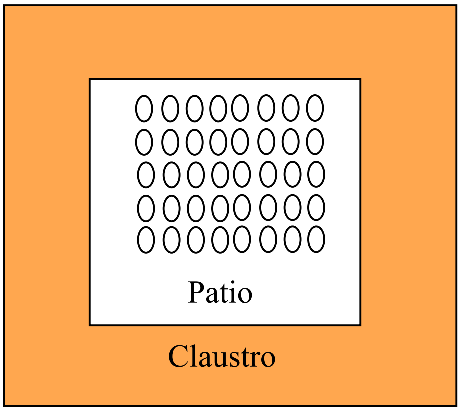
3 e) ¿Cuánto vale el producto de todos sus divisores? (puedes dejar el resultado en forma de potencia).

3 f) ¿Cuánto vale la suma de todos sus divisores? (puedes dejar el resultado en forma de potencia).

4.-Vísperas.

A esta hora , que de nuestro horario corresponde las 4 de la tarde, los monjes demostratenses se agrupaban para dar gracias y desearse la paz antes del trabajo de la tarde. Se reúnen en un patio interior, cuadrado y descubierto, si hace buen tiempo. En cambio, cuando llueve, los monjes ocupan el claustro cubierto que rodea el patio interior.
El hermano Guillermo se había dado cuenta de que estaban igual de anchos en el claustro que en el patio. El arquitecto cisterciense que diseñó el monasterio había reservado igual área para el patio y para el claustro. El patio tiene 20 metros de lado.

4 a) ¿Cuánto mide el lado del claustro?

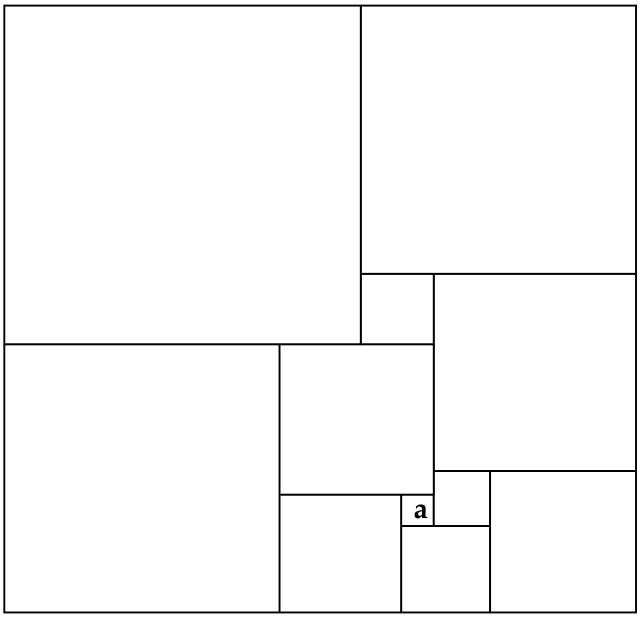


Los 40 monjes del monasterio que estaban en el patio interior esta vez formaron un rectángulo de 5 filas y 8 columnas.
Hubo unas oraciones en latín. Luego unos cánticos en el mismo idioma. El abad pidió a sus monjes que se diesen la paz, estrechándose la mano. Cada monje estrechó la mano de cada hermano que tenía alrededor. El hermano Guillermo había vivido el ritual durante los 60 años de su vida monástica, pero nunca se había preguntado si sería fácil calcular cuantos apretones de mano se dieron en total.

4.b) ¿Lo podrías calcular tú?
4.c) ¿Lo podrías generalizar para m filas y n columnas de monjes?

5.- Completas.

El día terminaba con la oración de completas en la iglesia. Allí Fray Guillermo se fijó en el dibujo que formaban las desiguales losetas de piedra enlucida de la pared: por algún extraño motivo el cantero solo había fabricado, y marcado con su firma, piedras cuya cara visible era cuadrada. Y entre todas ellas formaban también un enorme cuadrado en la pared. Este era su aspecto:



El mismo cantero había dejado grabado: ”el valor del lado **a** es de ocho pulgadas”, quizás pensando que ello sería suficiente para hallar el lado del cuadrado exterior y con ello el dinero que debía recibir por su obra.

De nuevo fray Guillermo tuvo la respuesta: -“Son pocos datos, pero suficientes”- pensó.

5 a) ¿Sabrás hallar el lado del cuadrado externo?. (Indicación: empieza por llamar x al lado del cuadrado contiguo al de lado **a** y expresa algebraicamente los lados del resto de los cuadrados).

Pero, no contento, a fray Guillermo se le ocurrió la siguiente pregunta, que espero que sepas contestar:

5 b)-“¿Qué valor entero debe tomar **a** para que el lado del cuadrado externo sea un número entero entre 1000 y 1100?” .

Olimpiada Matemática
2º ESO

Santander 4 de Mayo de 2013

Soluciones

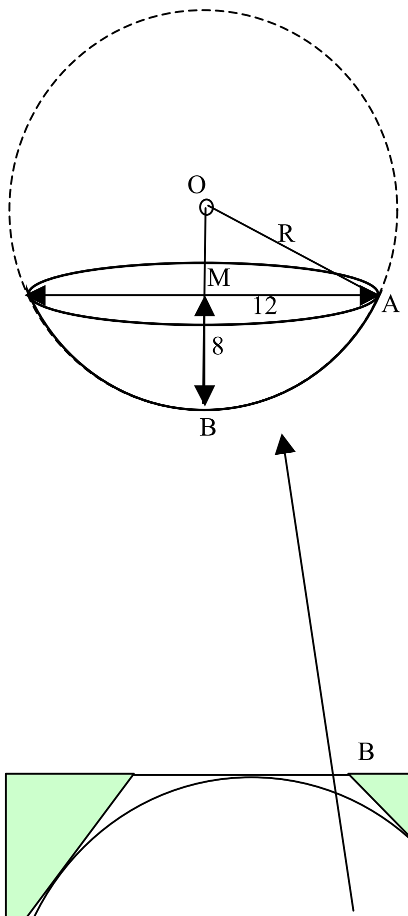
1. Laudes

1 a) Radio de la pelota

Trazamos los radios OA y OB ,
formando el triángulo rectángulo OMA.
Entonces OM = R-8 y MA = 12 cm.
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

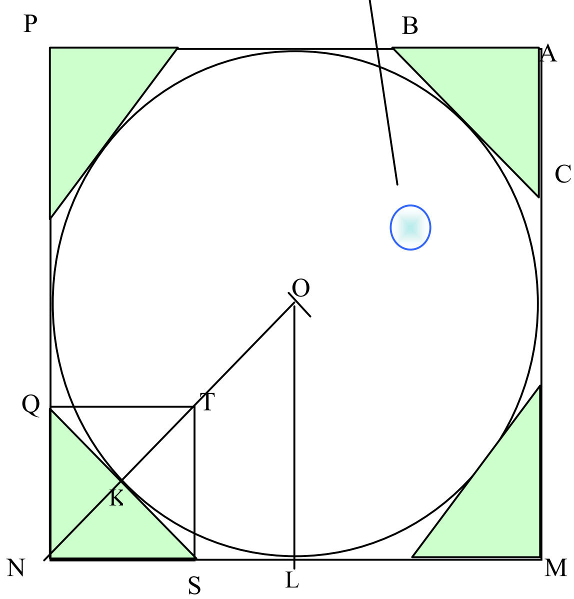
$(R-8)^2 + 12^2 = R^2$

Resolviendo la ecuación ➔ **R = 13 cm**.



1 b) Radio del estanque

El cuadrado NSTQ , formado por dos triángulos tiene área 18 m^2.
Por tanto su lado es $\sqrt{18} \cong 4.24$ m.
La diagonal del cuadrado es:
$\sqrt{\sqrt{18}^2 + \sqrt{18}^2} = \sqrt{36} = 6$ y la distancia NK vale 3..
El radio que buscamos es R = OK =OL
Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo NLO :
$(R+3)^2 = R^2 + R^2$
Y resolviendo:
R = $3 + 3\sqrt{2} \cong$ **7.24 m**



2.-Hora Prima.

2 a) ¿Cuántas ovejas había, al principio en cada grupo?

Si $\boldsymbol{x}$ es el número de ovejas del tercer grupo, el del segundo es $\boldsymbol{2x}$ y el del primero es $\boldsymbol{6x}$**.** La suma de todos debe de ser 333,por tanto :

$6x + 2x + x = 333$ ➔ $\boldsymbol{x = 37}$ **es el número de ovejas del tercer grupo**. $2x$ = **74 son las del segundo grupo** y $6x$ = **222 son las del primer grupo**.

2 b) ¿Cuántas ovejas pasaron del primero al segundo grupo y del primero al tercer grupo?

Necesito tres números de tres cifras, capicúas, que sumen 333. Luego todos deben empezar por 1. Los candidatos:

101-111-121-131-141-151-161-171-181-191

La suma de las decenas debe de los tres número debe de ser 3 (no puede ser 13 ó 23 por que nos pasaríamos de 333 en la suma). Así que los únicos candidatos son 101, 111 y 121. Como el primer grupo va a ser el menor, con 101, me tengo que llevar 121 a los otros, 37 al segundo para que alcance las 111, y 84 al tercero para que alcance 121.

La solución es que **pasan del primer al segundo grupo 37 ovejas y del primero al tercer grupo pasan 84 ovejas.**

3.- Hora Sexta.

En la sucesión 4-5-5-6-6-6-7-7-7-7-8-8-8-8-8-9-9…

3 a). ¿Cuántas veces aparecerá el número 2013?

Observamos que el 4 aparece 1 vez = 4-3

El 5 aparece 2 veces = 5-3

En general el número n aparece n-3 veces,

Luego **el 2013 aparecerá 2010 veces**

3 b) ¿Qué lugares ocupa el 2013 dentro de la sucesión?

Supongamos que la sucesión fuese 1-2-2-3-3-3-4-4-4-4-…. El número 2010 ocuparía los mismos lugares que el 2013 en la del enunciado. Observamos que la primera vez que aparece el número n, tiene por delante tantos lugares como la suma de 1 + 2+ 3+ 4+ … + n-1.

En el caso del 2010,que tiene 1 +2+ …. 2009 lugares delante, ocupa el **lugar** 1+2+…. +2009 +1 = $\frac{(1+2009)\cdot 2009}{2}+1$ **= 2019046 y los 2009 siguientes**.

3 c) ¿Qué número ocupa el lugar 2013?

Si la sucesión fuese 1-2-2-3-3-3-4-4-4-4-….. la primera aparición del número ***n*** tendría por delante tantos lugares como la suma de los números anteriores, o sea, el número ***n*** aparecería por primera vez en el lugar $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ +1. Para el lugar 2013 tenemos que resolver $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$+1=2013, y obtenemos n = 63.93 . Pero x debe de ser entero. Comprobamos : si x = 62 los lugares ocupados son (62+1) ·62/2 = 1953 , y el 63 ocupa el lugar siguiente o sea el 1954 y los 62 siguientes hasta el 2016 Efectivamente el numero 63 ocupa el lugar 1 +2 +…..62 +1 = $\frac{63\cdot 62}{2}+1=1954$, los siguientes 62 lugares hasta el 2016 están ocupados por el 63 , luego el lugar 2013 lo ocupa el 63. Como en la sucesión del problema no es 1-2-2-3-3-3-… sino 4-5-5-6-6-6… **el lugar 2013 lo ocupara el número 66.**

3.- Hora Sexta (continuación)

Del número $4 \cdot 5^{2013}$:

3 d) ¿Cuántos divisores tiene?

Los divisores son :

1,	5^1 ,	5^2 ,	5^3 , ……		5^{2013} :	aquí hay 2014
$2 \cdot 1$,	$2 \cdot 5^1$,	$2 \cdot 5^2$,	$2 \cdot 5^3$, ……		$2 \cdot 5^{2013}$:	aquí hay 2014
$4 \cdot 1$,	$4 \cdot 5^1$,	$4 \cdot 5^2$,	$4 \cdot 5^3$, ……		$4 \cdot 5^{2013}$:	otros 2014

Total 3 · 2014 = 6042 divisores

3 e) ¿Cuánto vale el producto de todos sus divisores?

Multiplicando las potencias de 5 da : $\left(5^{(1+2+...+2013)}\right)^3 = 5^{6081273}$

Multiplicando los factores 2 da : 2^{2014}

Y multiplicando los factores 4 da : 2^{4028}

En total: $5^{6081273} \cdot 2^{6042}$

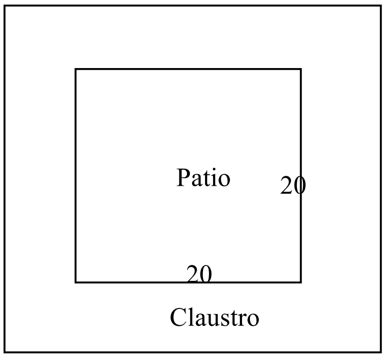
3 f) ¿Cuánto vale la suma de todos sus divisores?

La suma es

$$
\begin{aligned}
&1 + 5^1 + 5^2 + \dots\dots\dots + 5^{2013} \; + \\
&2 \cdot 1 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + \dots\dots\dots + 2 \cdot 5^{2013} \; + \\
&4 \cdot 1 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + \dots\dots\dots + 4 \cdot 5^{2013} \; = \\
&7 \cdot (1 + 5^1 + 5^2 + \dots\dots\dots + 5^{2013}) = \\
&= 7 \cdot \frac{5^{2014} - 1}{5 - 1} = \frac{7}{4} \cdot \left(5^{2014} - 1\right)
\end{aligned}
$$

4.-Vísperas.

4 a) ¿Cuánto mide el lado del claustro?



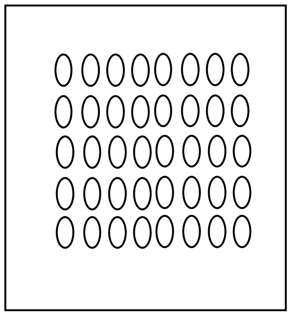
Área del patio = 20^2

Área del claustro = $x^2 - 20^2$

Igualando $x^2 - 20^2 = 20^2$

Y resolviendo …. $x = 20 \cdot \sqrt{2} \cong 28.28$

4.b) ¿Cuántos apretones de manos se dan en total?



Contamos por partes, según donde se encuentran los monjes:

4 en los vértices: $4 \cdot 3 = 12$

18 en los lados (no vértices) $18 \cdot 5 = 90$

18 en el interior $18 \cdot 8 = 144$

Total : 246.

Pero como hemos contado dos veces cada apretón de manos, en realidad son **123 apretones**

4.c) ¿Y en el caso de ***m*** filas y ***n*** columnas de monjes?

Procedemos de la misma forma

4 En los vértices ➔ 4 ·3 = 12

2((m-2)+(n-2)) en los lados (no vértices) ➔ 2((m-2)+(n-2)) ·5= 10 ·(m+n-4)

(m-2) ·(n-2) en el interior ➔ 8 ·(m-2) ·(n-2)

Sumamos y dividimos entre 2 :

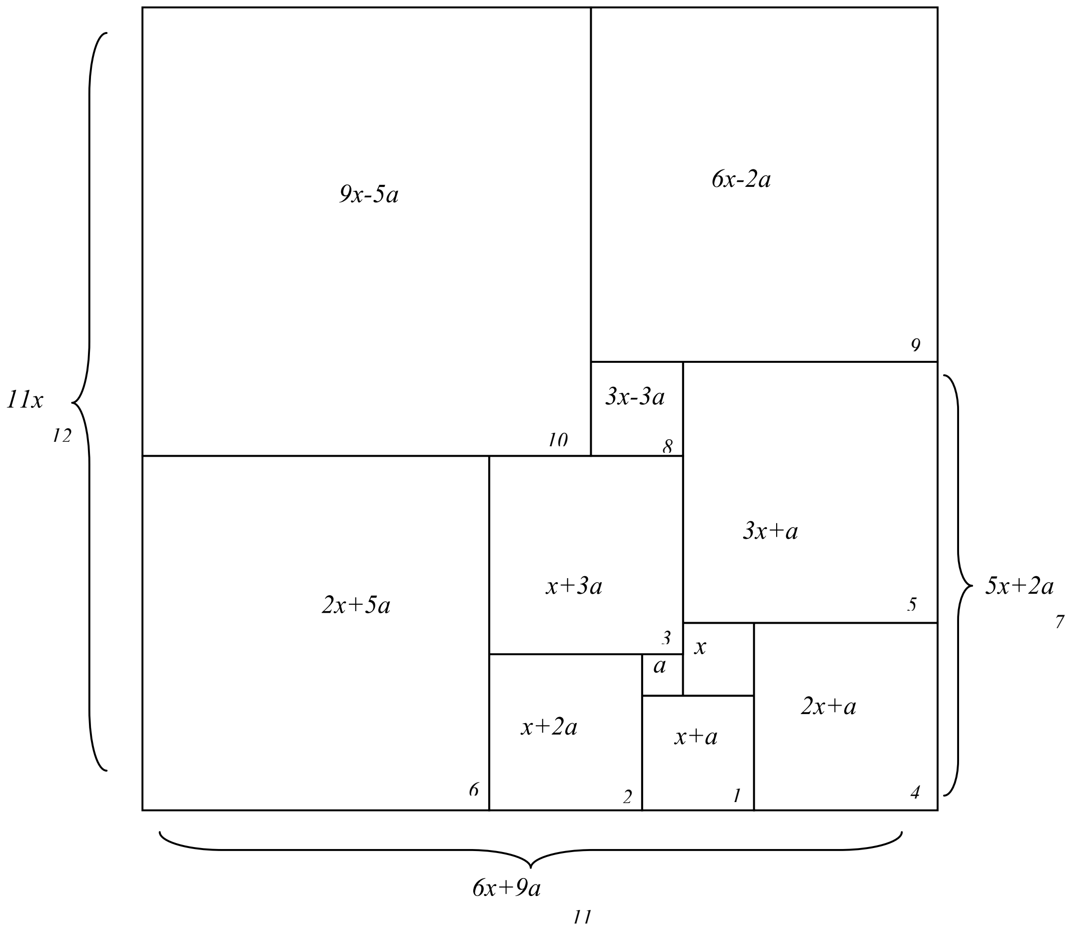
$$\frac{12 + 10\cdot(n+m-4) + 8\cdot(n-2)\cdot(m-2)}{2} = 6 + 5\cdot(n+m-4) + 4\cdot(n-2)\cdot(m-2) = \ldots$$

….= 4nm -3n-3m + 2

5.- Completas.

5 a) ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado grande?

A partir de ***a*=*8*** y ***x*** vamos expresando en el centro de cada cuadrado cuánto vale su lado, en el orden que se indica en la esquina inferior derecha de cada cuadrado:



Igualando base *11* y altura *12*: $11x = 6x + 9a$ ➔ $5x = 72$ ➔ $x = 14.4$ ➔ $11x$ =**lado del cuadrado = 158.4 pulgadas**

5 b) ¿Qué valor entero debe tomar ***a*** para que el lado del cuadrado externo sea un número entero entre 1000 y 1100?."

De la ecuación $11x = 6x + 9a$ ➔ $5x = 9 \cdot a$ ➔ $x = \dfrac{9a}{5}$ ➔ $lado = 11x = \dfrac{99 \cdot a}{5}$

Para que 1000 < lado < 1100 ➔ 5000< 99 $\cdot a$ < 5500 ➔ 50.50<*a*<55.*55* . Y para que el lado sea también entero, ***a*** debe de ser múltiplo de 5, por tanto ***a* = *55***