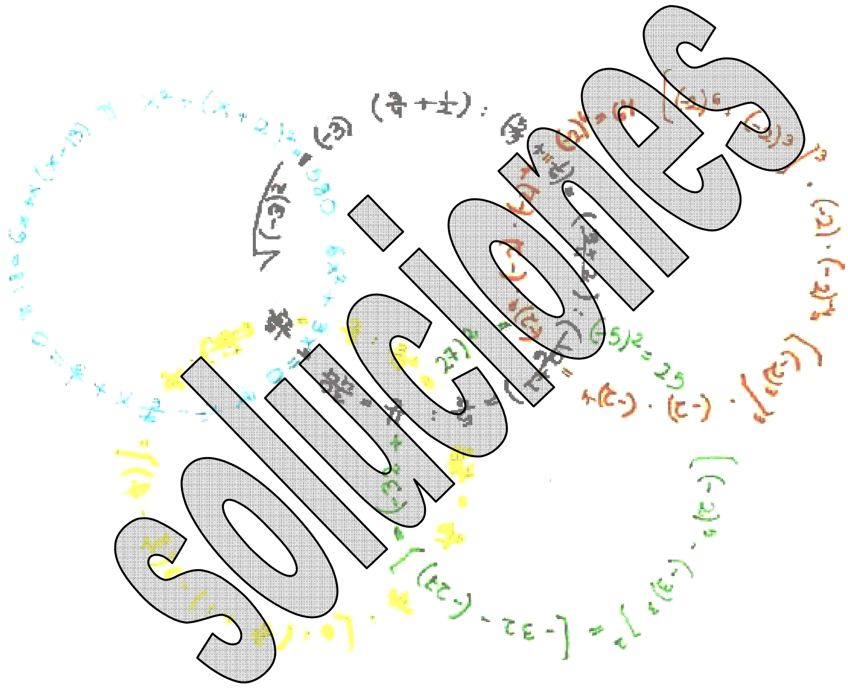
XVI Olimpiada Matemática para estudiantes de 2º de ESO



Santander. 12 de mayo de 2012

Ejercicio 1.- Día de las Matemáticas.

a) El año 2000 fue declarado por la UNESCO Año Mundial de las Matemáticas. La imagen de la derecha corresponde a una hoja entresacada de un periódico del año 2000 que habla de ello. ¿Cuántas páginas tiene este periódico?

b) La fecha del 12 de mayo quedó instituida como Día Escolar de las Matemáticas porque el 12 de mayo de 2000 se cumplía el centenario del nacimiento de Pedro Puig Adam, internacionalmente reconocido en el campo de la enseñanza de las Matemáticas.
En homenaje a la fecha de hoy te pedimos que nos digas cuál es la última cifra decimal del resultado de la división

$$\frac{12}{5^{2012}}$$

c) ¿Cuántas parejas de números naturales cumplen que su multiplicación es $\left(5^{12}\right)^{2012}$?

Soluciones:

a) Si la página 14 está emparejada con la 87, la página 1 = 14-13, estará emparejada con la 87+13 =100. Luego el periódico tiene 100 páginas.

b) Las fracciones $\frac{12}{5^{2012}}$ y $\frac{12 \cdot 2^{2012}}{10^{2012}}$ son equivalentes. La última fracción es una división por una potencia de 10 , luego el último decimal de la división será el dígito de las unidades del numerador.
Miramos la última cifra de las potencias de dos: $2^1= 2$, $2^2= 4$, $2^3= 8$, $2^4= 16$, $2^5= 32$, a partir de aquí se repite el mismo ciclo. Por tanto la última cifra de 2^{2012} es 6 y **la última cifra de 12 . 2^{2012} es 2.**

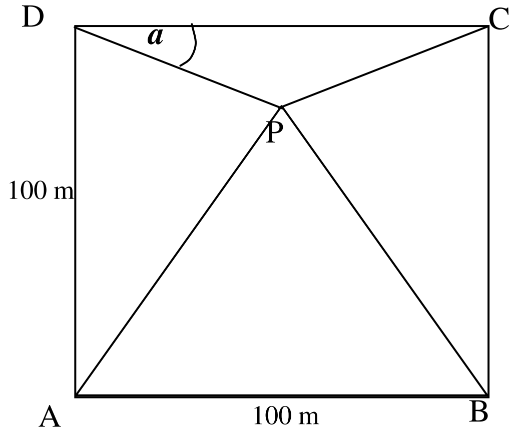
c) Los divisores de $\left(5^{12}\right)^{2012} = 5^{24144}$ son potencias de 5. Para que dos potencias de 5 , $5^a \cdot 5^b$ den como resultado 5^{24144} debe ser $a + b = 24144$. Las soluciones naturales de esta ecuación son (0,24144), (1, 24143),….(24144,0), en total hay **24145 soluciones** aunque si se identifican las soluciones simétricas sólo tendríamos **12073 diferentes.**

d) **Ejercicio 2.- El reparto de la parcela.**

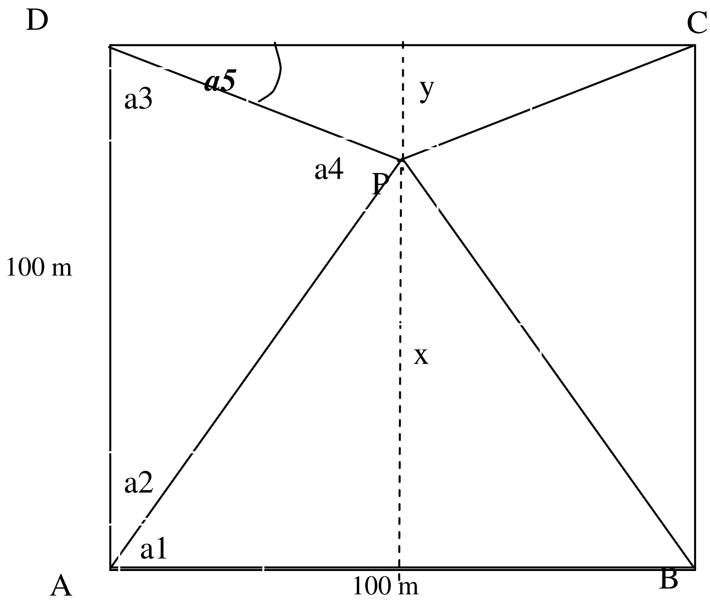
Vamos a repartir una parcela cuadrada ABCD, de 100 m de lado de la siguiente forma:
Dentro del cuadrado ABCD, construimos el triángulo **equilátero** ABP. Desde el vértice P del triángulo, unimos con segmentos a los vértices C y D del cuadrado. Se pregunta:

a) ¿Cuánto vale el ángulo ***a***?
b) ¿Cuánto vale el área del triángulo DCP?

(Razona tus respuestas).



Soluciones:



a) Hallamos los valores de los ángulos a1, a2, a3, a4 y a5= a, de la siguiente forma: a1 = 60º por pertenecer a un triángulo equilátero. a2 = 30º por ser el complementario de a1. a3 y a4 son ángulos correspondientes a lados iguales de un triángulo isósceles y por tanto son iguales, como a2+a3+a4 = 180º ➔ a3 = a4 = 75º , y por último **a5 = 15º** por ser complementario de a3.

b) La altura x del triangulo ABP, aplicando el teorema de Pitágoras, es: $x^2 + 50^2 = 100^2$ ➔ $x^2 = 7500$ ➔ x = 86,6025 m. La altura del triángulo CDP es 100- 86,6025 = 13,3975m. y su **área es** $\frac{100 \cdot 13.40}{2} = \mathbf{670\ m^2}$

Ejercicio 3.- Luces de Vynalezia.

Las 20 farolas de la Gran Vía de Vynalezia eran atendidas por veinte miembros de la organización de ciegos de ese lejano país. Estaban numeradas con números del 1 al 20 y tenían cada una de ellas un interruptor dentro de un cajetín con llave. Inicialmente, al caer la tarde, todas las farolas estaban apagadas. Entonces los empleados ciegos numerados del 1 al 20 hacían lo siguiente:
El empleado 1 tenía una llave maestra y pulsaba los interruptores de todas las farolas.
El empleado número 2 solo tenía llave de las farolas pares, por tanto pulsaba los interruptores de las farolas 2, 4, 6… 20 (apagándolas).
El empleado número 3 pulsaba los interruptores de las farolas 3, 6, 9, etc., sin atender si estaban encendidas o apagadas.
Y así sucesivamente.

a) ¿Cuántas farolas quedaban encendidas al final?

Ahora imaginemos que las farolas y los empleados fuesen 400, y actuasen de la misma forma:

b) ¿Cómo quedaría la farola número 90?
c) Di, razonadamente, el número de una farola que quedase encendida y otro de una farola que quedase apagada. Ambos números deben ser mayores de 100.
d) ¿Qué farolas quedarían encendidas al final?

Soluciones :

a) . Podemos hacer un cuadro indicando en cada fila el estado de cada farola a medida que pasa cada empleado, siendo 0 = apagada y 1 = encendida

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
empleado 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
empleado 2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
empleado 3	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
empleado 4	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
empleado 5	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0
empleado 6	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
empleado 7	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
empleado 8	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
empleado 9	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
empleado 10	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
empleado 11	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
empleado 12	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
empleado 13	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
empleado 14	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
empleado 15	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
empleado 16	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
empleado 17	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
empleado 18	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
empleado 19	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
empleado 20	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Quedan encendidas las farolas 1, 4, 9 y 16.

b) con 400 farolas es más laborioso hacer la tabla anterior, sin embargo con ella nos hemos dado cuenta de que el hecho de que la farola quede encendida o apagada depende del número de divisores que tenga su número, si el número de divisores es par la farola queda apagada y si es impar queda encendida. Los divisores de 90 son :
1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90 , en total 12 (par) **luego queda apagada.**

c) Para este apartado hay muchas respuestas. Por ejemplo la 121 queda encendida, porque solo tiene 3 divisores y la 122 queda apagada por que tiene 4 divisores.

d) Al hacer el apartado b) nos hemos dado cuenta de que, en la sucesión ordenada de los divisores de un número, el primer divisor multiplicado por el último da el número. También el segundo divisor por el penúltimo, y así las restantes parejas etc. Si el número de divisores es par se forman parejas de divisores diferentes, pero si es impar el divisor que ocupa el lugar central queda solo. En ese caso al multiplicarse por sí mismo da el número, que por tanto será un cuadrado. Es decir, para que halla un número impar de divisores el número debe ser un cuadrado.
Así, las farolas que quedan encendidas **son 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196.** (este apartado soluciona también el apartado c)

Ejercicio 4.- Estudiantes griposos.

En una ciudad hay tres institutos que imparten 2º ESO: IES Pitágoras de Samos, IES Tales de Mileto e IES Hipatia de Alejandría. Averigua el número de estudiantes de 2º ESO que hay en cada centro, sabiendo que:
- En el IES Hipatia, hay 7 estudiantes menos que en el IES Tales.
- Este lunes, el 30% del total de los estudiantes de los tres IES estuvieron con gripe.
- Estuvieron enfermos el 40% de los estudiantes del IES Pitágoras, el 25% de los estudiantes del IES Tales y en el IES Hipatia hubo 6 enfermos.
- Hubo 33 enfermos en total.

Solución:

Llamemos:
x= nº de estudiantes del IES Pitágoras
y = nº de estudiantes del IES Tales
z = nº de estudiantes del IES Hipatia

Las ecuaciones a plantear son:

$$\begin{cases} x = y - 7 \\ 30\%(x+y+z) = 33 \\ 40\%x + 25\%y + 6 = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 7 \\ x+y+z = \frac{33}{30}\cdot 100 \\ \frac{40x}{100} + \frac{25y}{100} + = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 7 \\ x+y+z = 110 \\ 40x + 25y = 2700 \end{cases}$$

sustituyendo z en la segunda ecuación ➔ $\begin{cases} x+y+y-7 = 110 \\ 40x+25y = 2700 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} x+2y = 117 \\ 40x+25y = 2700 \end{cases}$

➔ $\begin{cases} x = 117 - 2y \\ 40x+25y = 2700 \end{cases}$ ➔ sustituyendo la x de 1ª ecuación en la segunda ➔
$40(117-2y)+25y = 2700$ ➔ $4680 - 80y + 25y = 2700$ ➔ $4680 - 2700 = 80y - 25y$
➔ 1980 = 55y ➔ **y** = 36
De las otras ecuaciones resulta z = 36- 7 = 29 , x = 117 – 2 ·36 = 45

El IES Pitágoras tiene 45 estudiantes de 2º de ESO,
El IES Tales tiene 36 estudiantes de 2º de ESO.
El IES Hipatia tiene 29 estudiantes de 2º de ESO.

Ejercicio 5.- Por un olvido.

Francisco desea jugar con los juegos de su antiguo teléfono móvil pero olvidó la clave. Apenas recuerda que su clave contiene 4 dígitos y cumplen las condiciones:

- Ninguno de los dígitos es 0 ni es mayor que 5.
- No hay dígitos repetidos.
- No hay dos dígitos adyacentes que sean números consecutivos.
- La clave es un múltiplo de 4.

Por ejemplo, el número 1135 no cumple las condiciones porque se repite el dígito 1. El número 5413 tampoco cumple las condiciones porque las dígitos 4 y 5, que son consecutivos, ocupan lugares adyacentes.

¿Cuántas claves cumplen todas las condiciones?

Solución:

Tenemos que combinar los números 1,2,3,4y 5 . Como la clave es múltiplo de 4 las únicas posibilidades de terminaciones son 12, 24, 32, 52. Descartamos la terminación 12 y 32 por que no cumplen la tercera condición

Partamos de __, __ ,2 ,4 . En la 3ª posición no puede haber ni 1 ni 3, luego necesariamente debe haber un 5 , así: __,5 , 2, 4 y en la primera posición puede haber un 1 o un 3. Por tanto tenemos dos posibles claves : 1, 5, 2, 4 y 3, 5, 2, 4

Si partimos de la terminación __,__, 5 ,2 , en la tercera posición podemos poner 3 ó 1. Con el 3 queda __, 3,5,2 y en la primea posición cabe sólo el 1 quedando la clave 1 , 3, 5, 2. Si cambiamos el 3 por el 1, queda __, 1, 5, 2 y en la primera posición cabe el 3 y el 4. Por tanto otras dos posibles claves son 3, 1, 5, 2 y 4, 1, 5, 2

En total Francisco probó 5 claves: 1524 , 3524 ,1352, 3152 y 4152