Introducción

La prueba de la XV Olimpiada Matemática de 2º de ESO de Cantabria, celebrada en a Universidad de Cantabria el 16 de abril de 2011 consta de 5 ejercicios de diferentes temas adecuados a los contenidos de 2º de ESO.

Esta prueba fue pensada por un equipo de profesores de secundaria para que el participante demostrara una variedad de competencias relacionadas con las matemáticas, competencias que se detallan a continuación:

En el ejercicio 1 el alumno demuestra conocimientos sobre el sistema decimal, nociones básicas sobre ecuaciones y ser metódico en el planteamientote relaciones y en el análisis de todas las soluciones posibles.

En el ejercicio 2 el alumno demuestra conocimientos sobre longitud de la circunferencia, sobre ángulos, sobre triángulos isósceles y rectángulos y teorema de Pitágoras y sobre movimientos y orientación en el espacio.

En el ejercicio 3 el alumno demuestra nociones de aritmética, sobre números pares e impares, media aritmética, y nociones de lógica.

En el ejercicio 4 el alumno demuestra ser metódico en los casos de escaleras de un escalón, dos escalones, tres escalones y cuatro escalones, y a partir de aquí ser capaz de abstraer y generalizar una fórmula o procedimiento general por inducción.

En el ejercicio 5, donde los participantes disponían de un juego de tangram, manifestaban habilidades manipulativas, en el primer apartado. En el segundo manifestaban propiedades elementales de descomposición de figuras para hallar su área y, de nuevo, el teorema de Pitágoras para el perímetro (puesto que estaba indicado que no se podía usar regla para medir), debiendo trabajar , no con números concretos, sino con datos genéricos (como el lado del cuadrado original).

1.-Sumas simultáneas

Debes asociar a cada letra un número distinto de 0 al 9, de forma que se cumplan las dos sumas siguientes a la vez.

$$\begin{array}{rr} & \text{O N C E} \\ + & \text{N U E V E} \\ \hline & \text{V E I N T E} \end{array} \qquad \mathbf{V+E+I+N+T+E=20}$$

Solución:

De la columna de las unidades ➔ E = 0

Como V $\neq 0$ ➔V=1 puesto que sólo me puedo llevar 1 de la columna de las decenas de millar a las centenas de millar.

N = 9 puesto que de no ser así no me llevaría 1 a la columna de las centenas de millar.

O + U > 10 para llevarme una a la columna siguiente.

De todo lo anterior queda

I + T = 10
C + 1 = T
O + U -10 = I

Hacemos una tabla con todas las posibilidades y descartamos las filas con cifras repetidas teniendo en cuenta que el 9, el 0 y el 1 ya están reservados.

I	T= 10-I	C = T-1	O	U = 10+I-U	
2	8	7	8	4	descartado
2	8	7	7	5	descartado
2	8	7	6	6	descartado
2	8	7	5	7	descartado
2	8	7	4	8	descartado
3	7	6	8	5	
3	7	6	7	6	descartado
3	7	6	6	7	descartado
3	7	6	5	8	
5	5	*	*	*	descartado
6	4	3	8	8	Descartado
7	3	2	9	8	Descartado
8			9	9	descartado

Luego, como se ve solo caben las posibilidades I = 3 ,T = 7, C = 6, O = 8 , U = 5 y I = 3 ,T = 7, C = 6, O = 5, U = 8

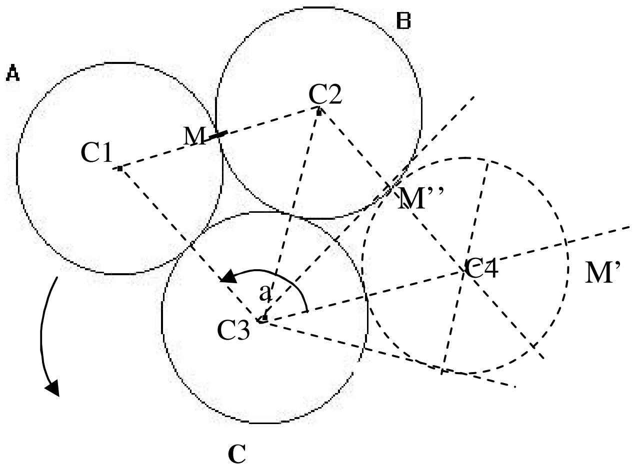
O sea: **8960+ 95010** = 103970 y **5960 + 98010**= 103970

2.- Rodamientos

Tenemos tres circunferencias iguales de radio 2 centímetros que se están tocando, tal y como indica la figura.

Si hacemos rodar la circunferencia A alrededor de la circunferencia C hasta tocar a la circunferencia B por el otro lado sabrías decir:

a) la distancia que ha recorrido el centro de la circunferencia A
b) ¿A qué distancia ha quedado el punto M del centro de la circunferencia C y del centro de la circunferencia B?



Solución:

a) Los triángulos C1,C2,C3 y C2,C3,C4 son triángulos equiláteros por tanto el ángulo central **a** es de 120 grados.

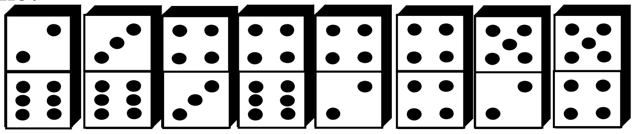
El centro C1 recorre 240 grados de una circunferencia de radio 4. Luego $2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot \frac{240}{360} = \frac{16}{3} \cdot \pi \cong 16.75$ cm.

b) Si el centro C1 recorre $\frac{16}{3} \cdot \pi$ cm rodando y el perímetro de la circunferencia es de 4π cm. significa que ha dado $\frac{\frac{16}{3}\pi}{4\pi} = \frac{4}{3}$ vueltas, o sea 480 grados respecto de la posición M' (sin rodar) , quedando en la posición M'' . La distancia de M''a C1 es de 2 y la distancia de M'' a C3 , por el teorema de Pitágoras es de $\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \cong 3.46$

3.- ¿Dominas los cuadrados mágicos?

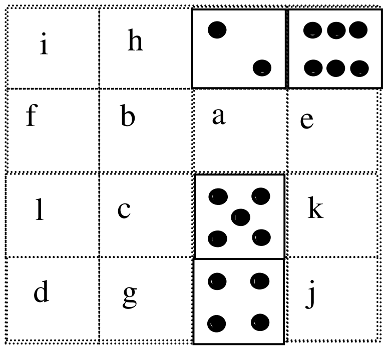
Un cuadrado mágico es un cuadrado en el que todas las filas, todas las columnas y las dos diagonales suman lo mismo.

Con las fichas de dominó:



puestas en vertical o en horizontal debes formar un cuadrado mágico de cuatro filas y cuatro columnas. Como ayuda te ponemos dos fichas:

Solución:



El total de puntos que hay en las fichas de dominó es de 64. Como deben estar repartidos en 4 columnas con la misma suma de puntos, resulta que encada columna (en cada fila y en cada diagonal) debe haber 16 puntos.

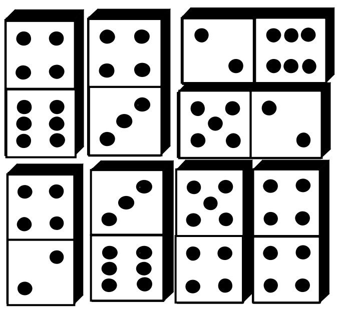
Por tanto ***a*** debe ser 5.
Para conseguir16 puntos, una fila puede tener todos los números pares, dos impares , o 4 impares. Luego ***b*** y ***c*** deben tener los dos impares que quedan ***b*** = 3 ***y c*** = 3 .

La diagonal secundaria queda completa con ***d*** = 2
e forma parte de la misma ficha que ***a*** , como el (5,4) ya está puesta, sólo cabe que ***e*** = 2

y por tanto ***f*** = 6

g ha de ser mayor que 2 , de lo contrario no se conseguiría 16 en la ultima fila, si fuese 4 me obligaría a poner ***h*** = 6, i = ***2*** , imposible por solo tengo tres doses, luego ha de ser ***g*** = 6
esto obliga a ***h*** = 4
esto obliga a ***i*** = 4
esto obliga a ***j***= 4
esto obliga a ***k*** = 4
y esto obliga a ***l*** = 4

Luego la **única** solución es:



4.- Escaleras para locos.-

La entrada a un manicomio tiene una escalera de 13 peldaños. Los locos suben o bajan la escalera en pasos de un peldaño o de dos peldaños o mezclando pasos de un peldaño con pasos dos peldaños.

Cada loco sube la escalera de un forma propia y diferente a la de los demás por que, dicen, trae mala suerte que dos de ellos suban la escalera de la misma forma (es una manía de locos).

Hasta ahora eso ha sido posible, pero, a día de hoy hay 620 locos en el manicomio.¿Habrá suficientes formas distintas de subir la escalera para todos ellos? ¿Cuántas formas distintas de subir la escalera hay?

(Indicación: puedes empezar contando las formas de subir en una escalera de 1 escalón, de 2 escalones, después de 3 escalones, etc....)

Solución:

Para un escalón solo hay una forma (1)
Para dos escalones hay dos formas (1,1) y (2), dos formas
Las maneras de subir una escalera de tres escalones, según el paso con el que se comience, se dividen en:

- si empezamos con un paso de dos escalones el escalón que falta es como la escalera de un escalón , por tanto se sube de una forma
- si empezamos con un paso de un escalón, lo que me falta es como el caso de escalera de dos escalones por tanto dos formas.

Así las maneras de subir una escalera de tres escalones es la suma de las dos anteriores., es decir, tres formas.
Razonando de la misma forma obtenemos que las maneras de subir una escalera de 4 escalones es la suma de las maneras de subir una de dos y una de tres.

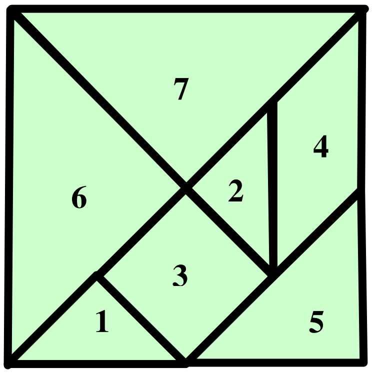
Llegamos por tanto la siguiente sucesión de resultados:

Escalones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Formas	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	**377**

377 formas de subir una escalera de 13 escalones en pasos de uno o de dos. !***No hay bastantes para tantos locos!.***

5.- Tangram

El tangram de la figura es un cuadrado de 14,5 cm. de lado. Debes hacer lo siguiente:



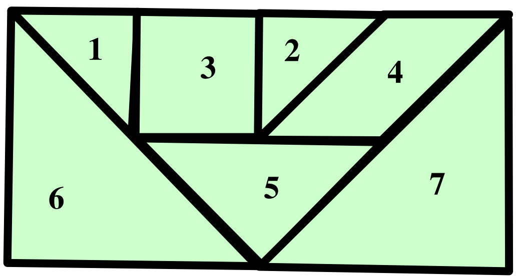
Forma con todas sus piezas un rectángulo que tenga un lado doble que otro. La respuesta la debes dar dibujando las piezas con su número (como en la figura inferior derecha).

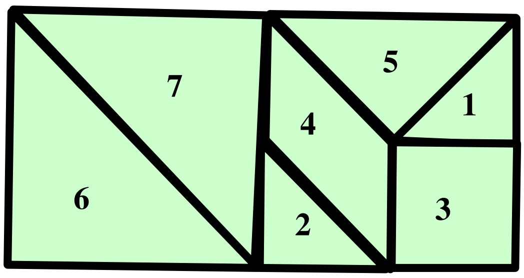
Explica cuál de las piezas 3, 4 y 5 es la que tiene mayor área y cuál es la que tiene mayor perímetro.

Solución

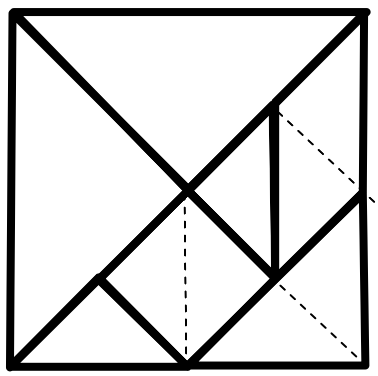
a) Para eliminar posibilidades nos podemos preguntar cual será la altura del rectángulo:

En un rectángulo de altura x y base 2x el área es $2x^2$, que ha de ser igual a $\boldsymbol{a^2}$, siendo $\boldsymbol{a}$ el lado del cuadrado original. De aquí $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. La figura (6) y la (7) tienen como longitud de catetos justamente $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. A partir de aquí vamos probando hasta encontrar estas soluciones:





b) Como se ve por el número de triángulos (que son 2) que contienen las figuras (3), (4) y (5) tienen el mismo área.



En cuanto a perímetros, si x es el lado del cuadrado (3), su perímetro es 4x. Su diagonal es $\sqrt{2}x$, por tanto el perímetro de la figura (4) es 2x +2$\sqrt{2}x \cong$ 4.83 x , y el de la figura (5) es también 2x +2$\sqrt{2}x$ $\cong$4.83x

Luego, en cuanto a perímetros: (2) <(3) = (4)